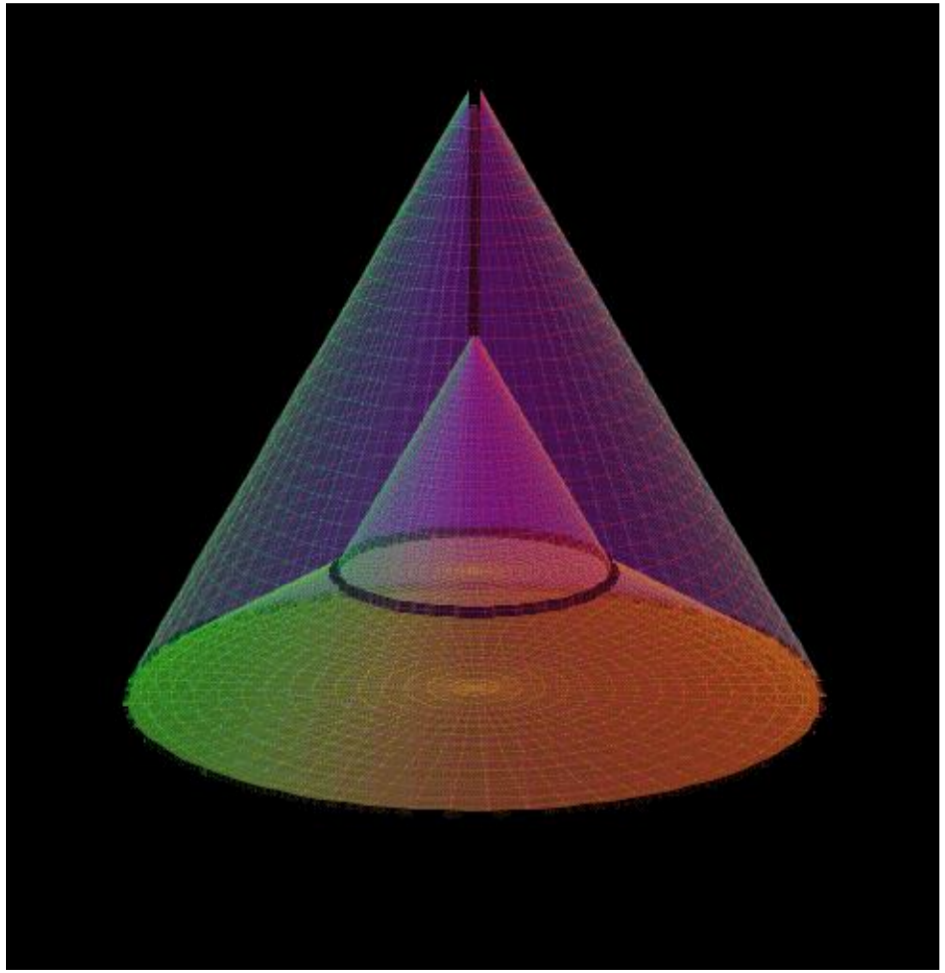
PITAGORAS
ACADEMIA

GEOMETRÍA

Profesor:
Marco Almerco

GEOMETRÍA DEL ESPACIO



CONO

PITAGORAS ACADEMIA

TEMA 23: CONO

SUPERFICIE CÓNICA

CONO: DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

CLASIFICACIÓN

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DE UN CONO

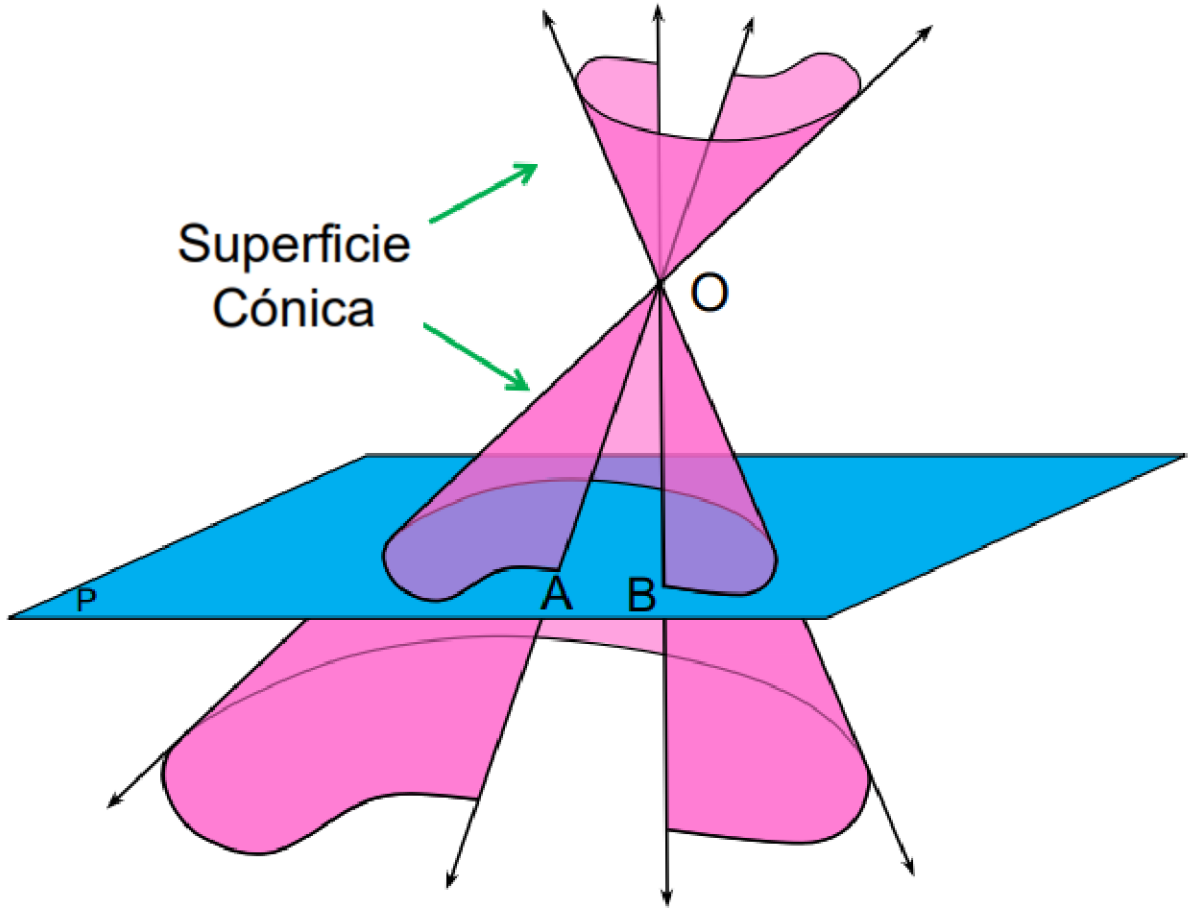
CONOS SEMEJANTES

TRONCO DE CONO

CONO

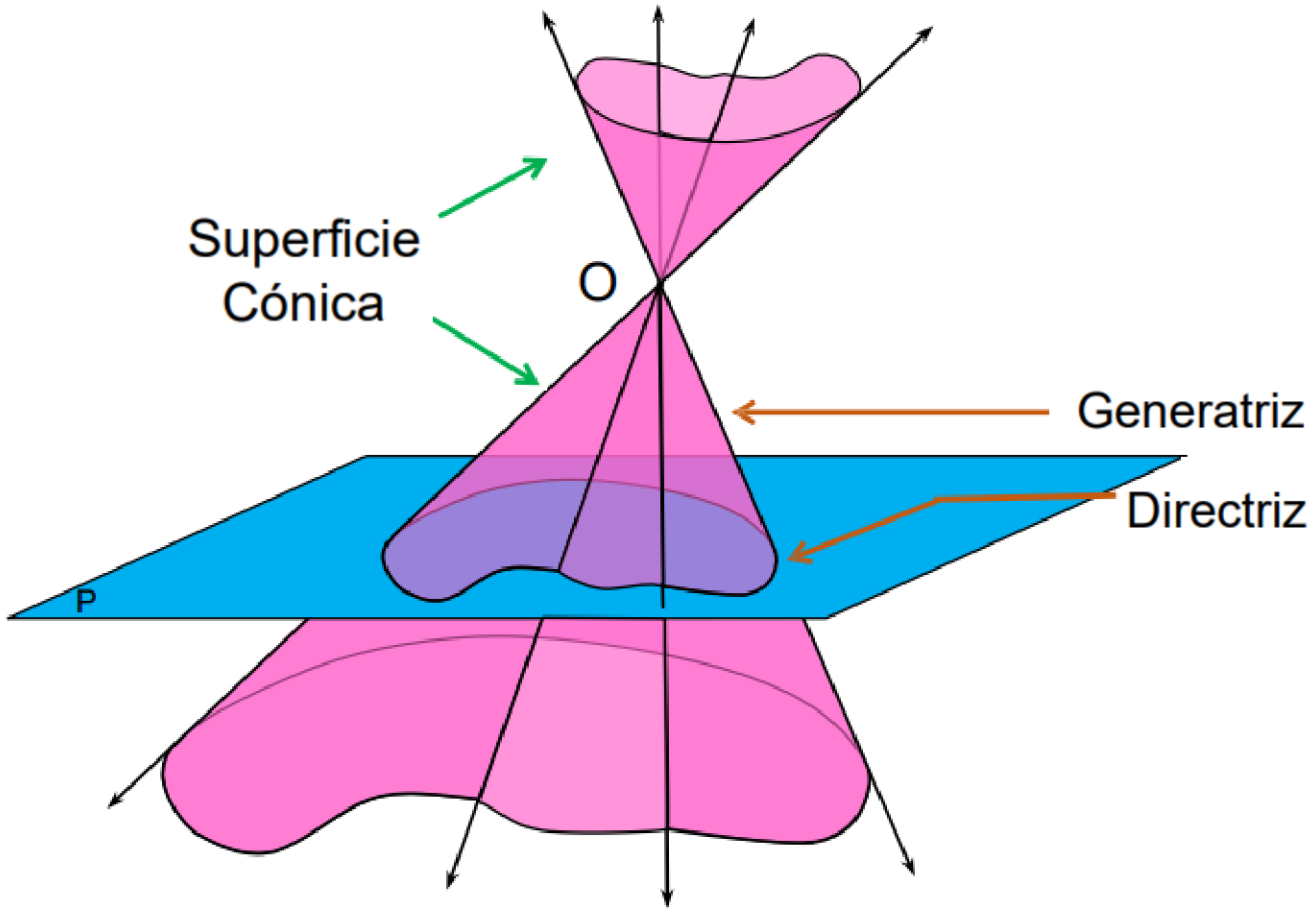
SUPERFICIE CÓNICA

Definición.- Se denomina ***superficie cónica*** a la superficie generada por una recta que se desplaza por una línea curva plana simple abierta o cerrada y un punto fijo, no contenido en el plano de la curva



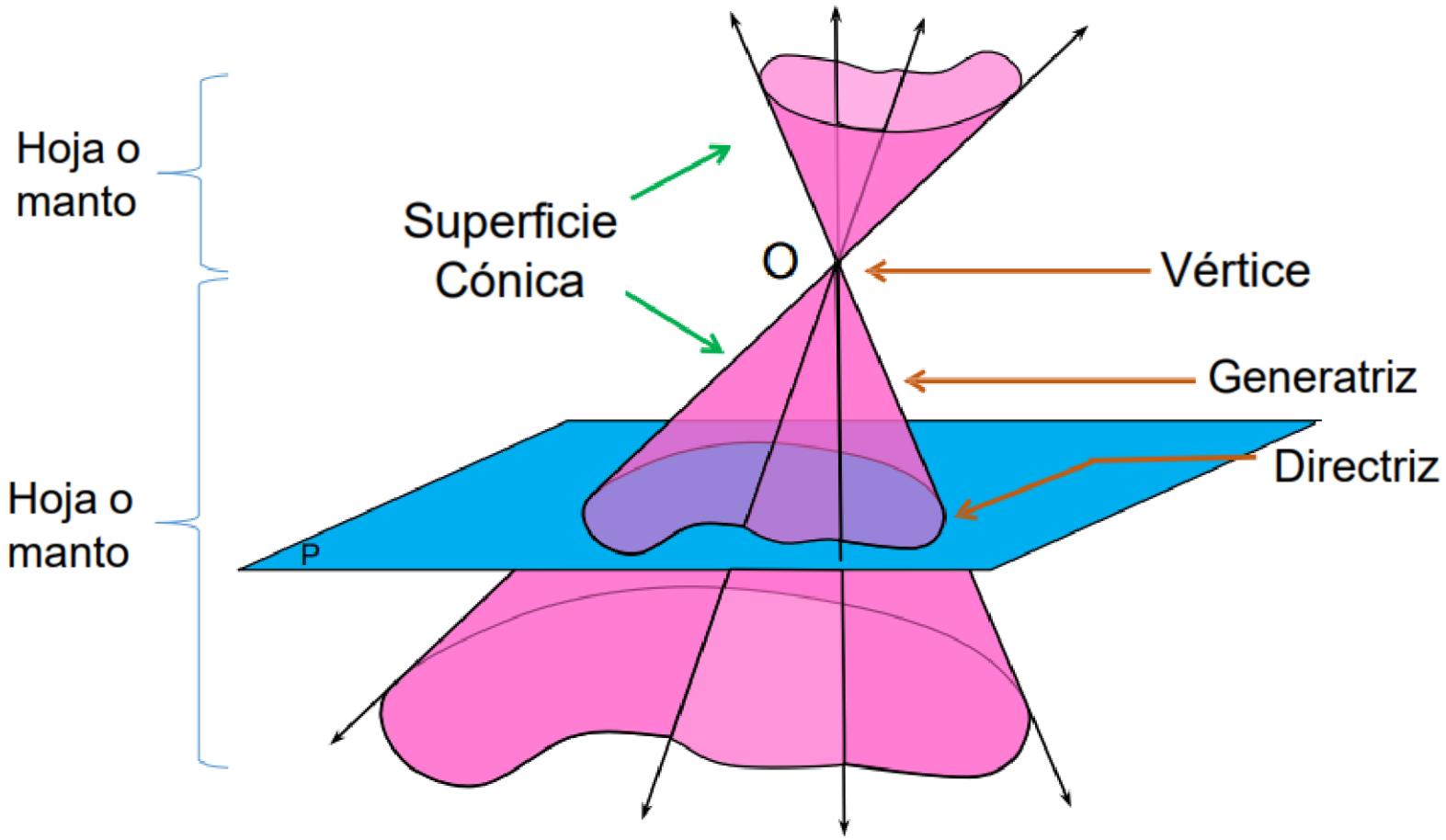
La superficie cónica es abierta, si la directriz es una curva abierta

CONO



La superficie cónica es cerrada, si la directriz es una curva cerrada

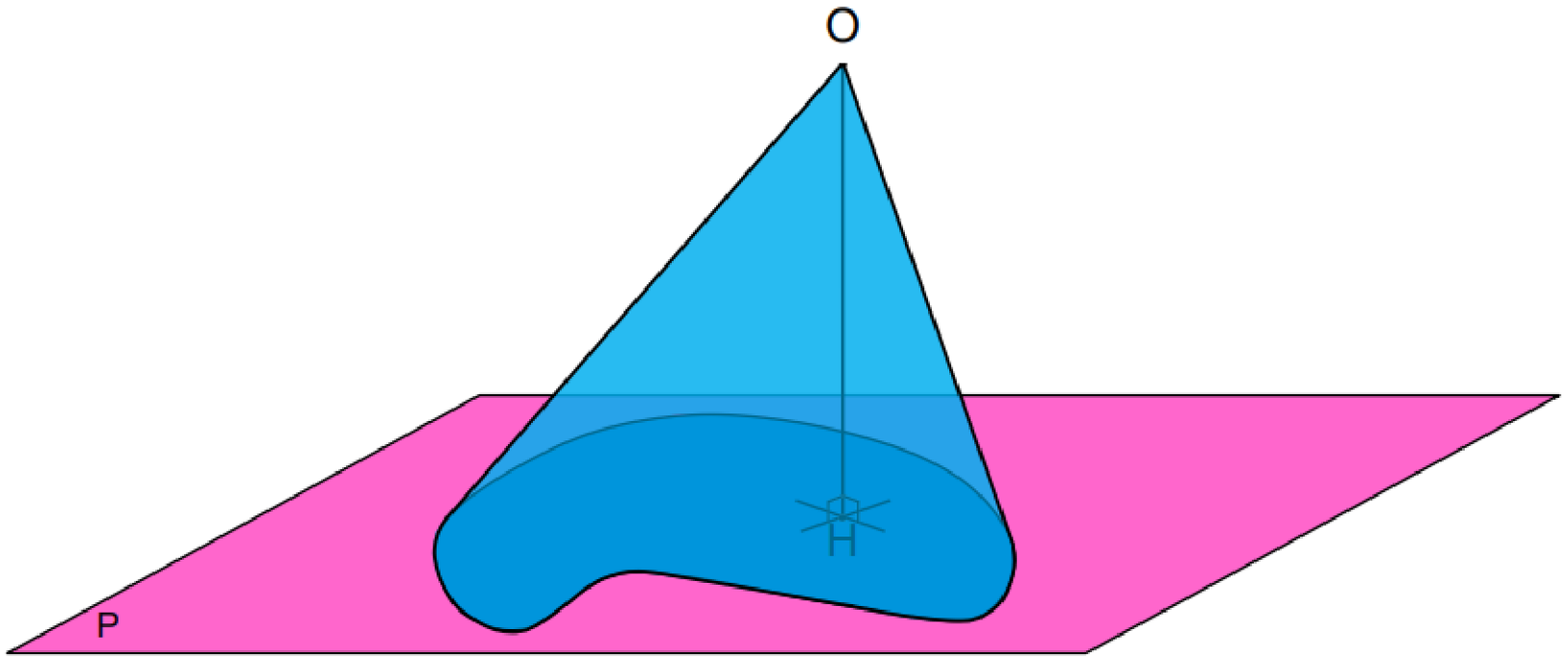
CONO


Hoja o manto
Hoja o manto
Superficie Cónica
O
Vértice
Generatriz
Directriz
P

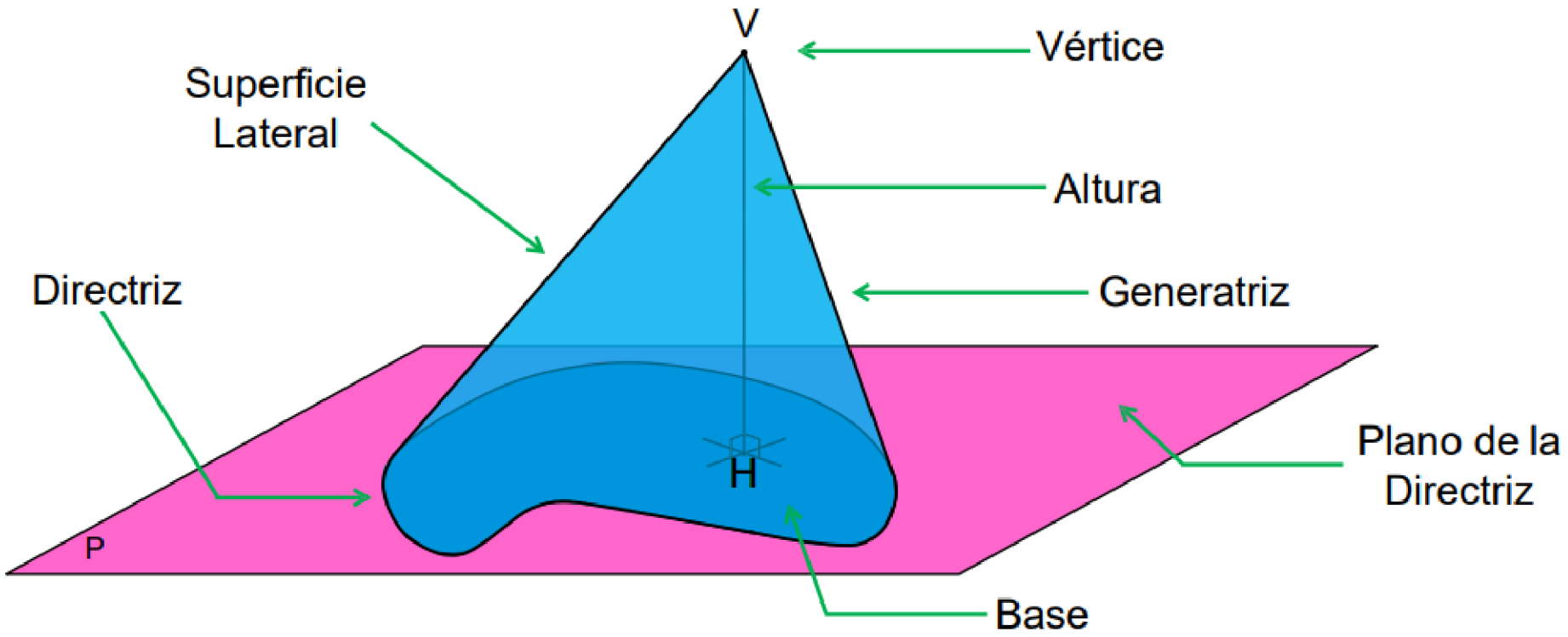
CONO

CONO

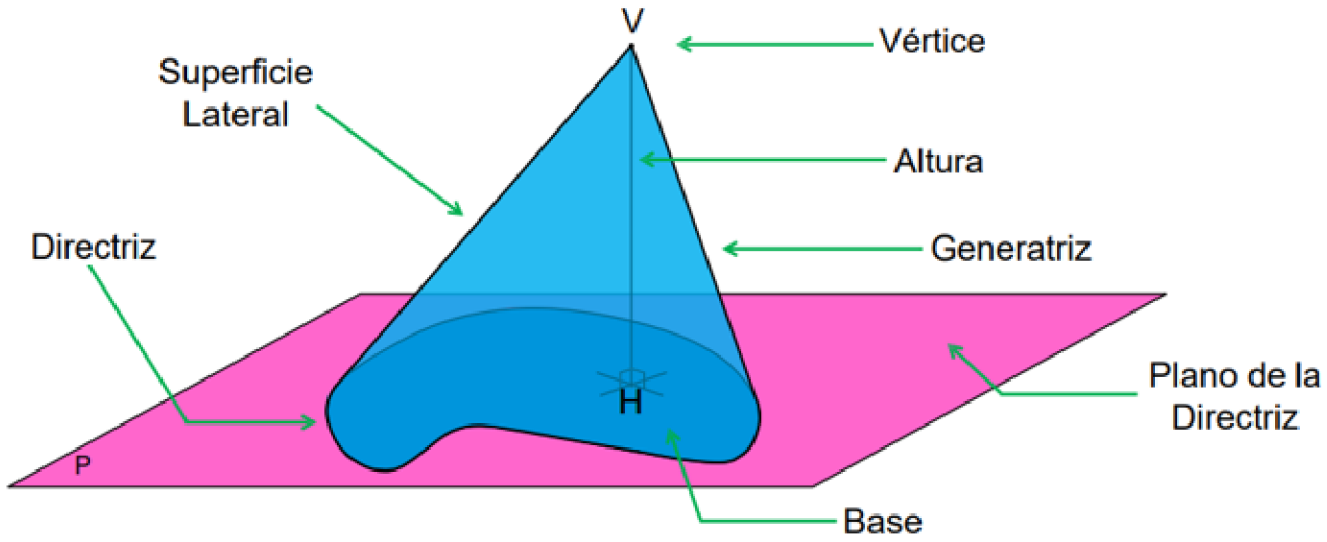
Definición.- Se denomina ***cono*** a la unión de la sección determinada por un plano secante a una superficie cónica cerrada y una parte de esta superficie comprendida entre el vértice y el plano.



CONO


V
Vértice
Superficie
Lateral
Altura
Directriz
Generatriz
H
Plano de la
Directriz
P
Base

CONO



Definiciones

Directriz.- Línea curva plana simple abierta o cerrada.

Vértice.- Punto fijo y exterior al plano que contiene a la directriz.

Generatriz.- Segmento que une el vértice con cualquier punto de la directriz.

Base.- Sección determinada por un plano secante y una superficie cónica cerrada.

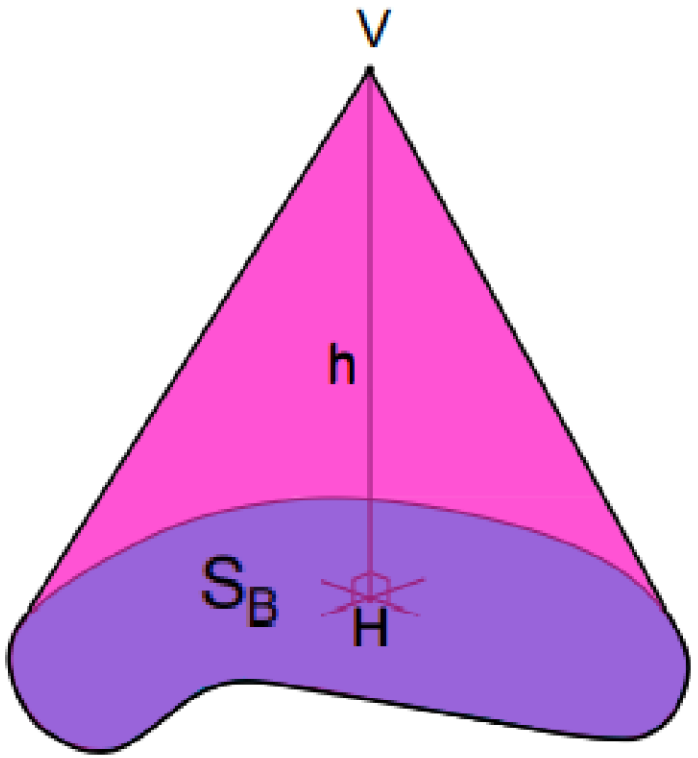
Superficie lateral.- Superficie comprendida entre el vértice y la base del cono.

Superficie total.- Es la unión de la superficie lateral y la base del cono.

Altura.- Segmento perpendicular trazado desde el vértice hasta el plano de la base.

CONO

Teorema.- El volumen del sólido cónico es igual a un tercio del producto del área de la base y la longitud de la altura.



$$V = \frac{1}{3} S_B . h$$

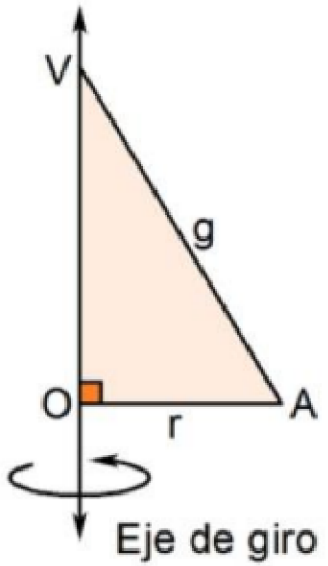
CONO

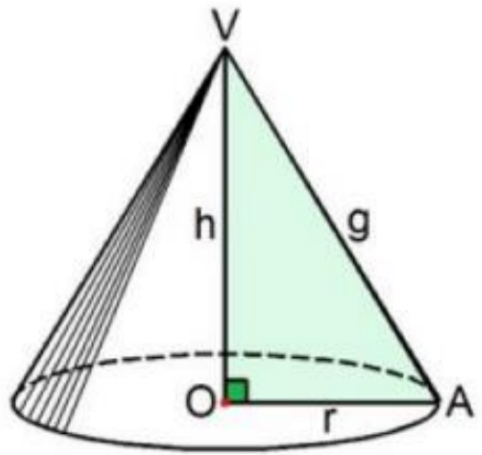
CONO CIRCULAR RECTO O CONO DE REVOLUCIÓN

Es la figura geométrica generada por la rotación de un triángulo rectángulo al girar una vuelta alrededor de un eje que contiene a uno de sus catetos.

Si el triángulo rectángulo VOA rota alrededor del cateto $\overline{VO}$, entonces genera el cono representado en la figura.

El cateto $\overline{VO}$ del triángulo generador es el eje (altura); el otro cateto $\overline{OA}$, es el radio de la base y la hipotenusa $\overline{AV}$ es la generatriz del cono.





ΔVOA: Triángulo rectángulo generador

$$S_{LATERAL} = (\pi r)g$$

$$S_{TOTAL} = \pi r(g + r)$$

$$V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

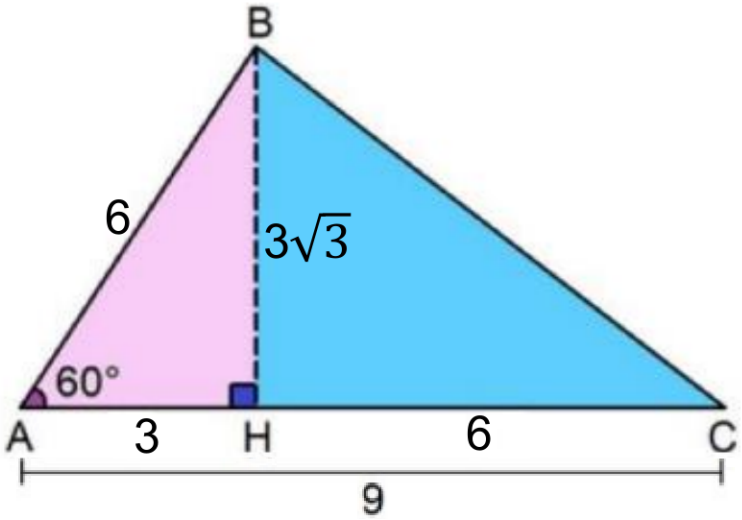
EJEMPLO

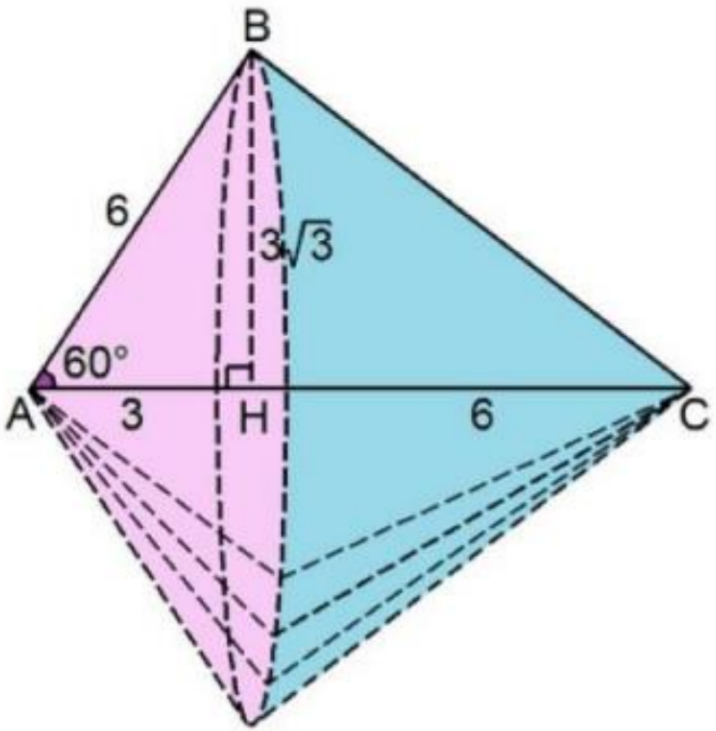
En un triangulo ABC: AB=6 m, AC=9 m y m∠BAC=60. Halle el volumen del solido generado por la región triangular ABC al girar 360° alrededor de la recta AC .

A) 80 π m^3
B) 81 π m^3
C) 82 π m^3
D) 83 π m^3
E) 85 π m^3

RESOLUCIÓN

Al trazar la altura $\overline{BH}$, se obtienen dos triángulos rectángulos que al hacerlos girar en torno a $\overline{AC}$ generaran dos conos.





Se pide la suma de los volúmenes de los conos formados, es decir:

$$V_x = \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3})^2.3 + \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3})^2.6$$

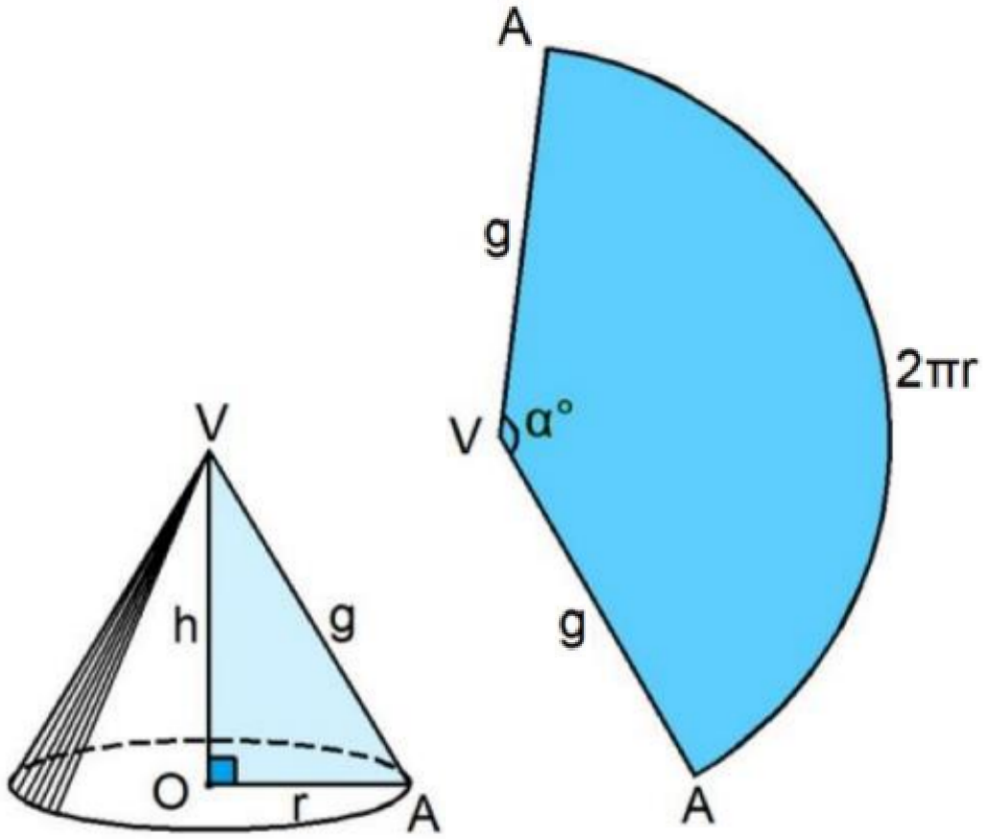
$$V_x = 27\pi + 54\pi$$

$$\therefore V_x = 81\pi$$

CONO

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN CONO DE REVOLUCIÓN

El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución, es un sector circular cuyo radio es la generatriz del cono, además la longitud de arco del sector es igual a la longitud de la circunferencia de la base del cono.



Observe que la superficie lateral del cono y el sector circular tienen igual área, luego:

$$S_{L(CONO)} = S_{SECTOR\ (AVA)}$$

$$\pi rg = \pi g^2 \frac{\alpha}{360}$$

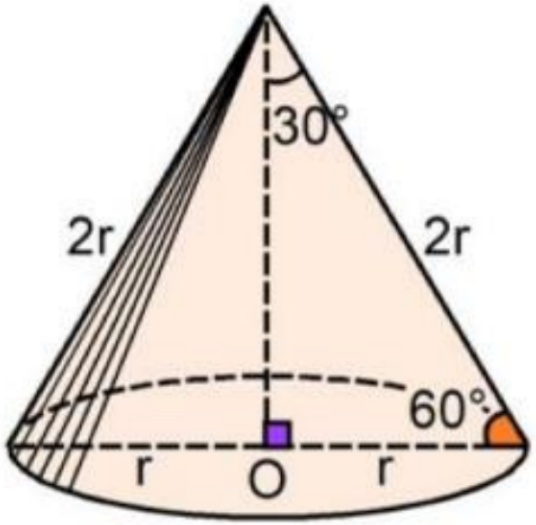
$$\frac{r}{g} = \frac{\alpha}{360}$$

CONO

NOTA:

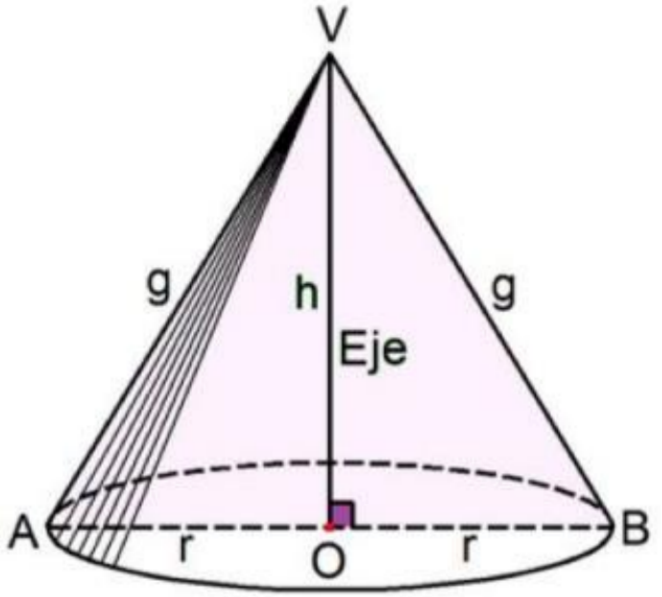
Si el desarrollo de la superficie lateral de un cono circular recto es un semicírculo, entonces el diámetro de la base del cono es congruente con la generatriz.

En este caso se dice que el cono es equilátero.



SECCIÓN AXIAL DE UN CONO DE REVOLUCIÓN

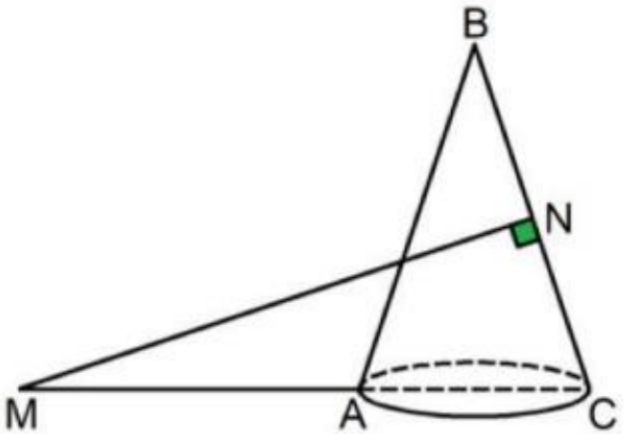
Es la sección determinada en el cono por un plano que contiene al eje. En un cono de revolución la sección axial es un triángulo isósceles que tiene por lados congruentes a dos generatrices diametralmente opuestas, su base es el diámetro de la base del cono y tiene por vértice el del cono.



ΔAVB: Sección axial del cono

EJEMPLO

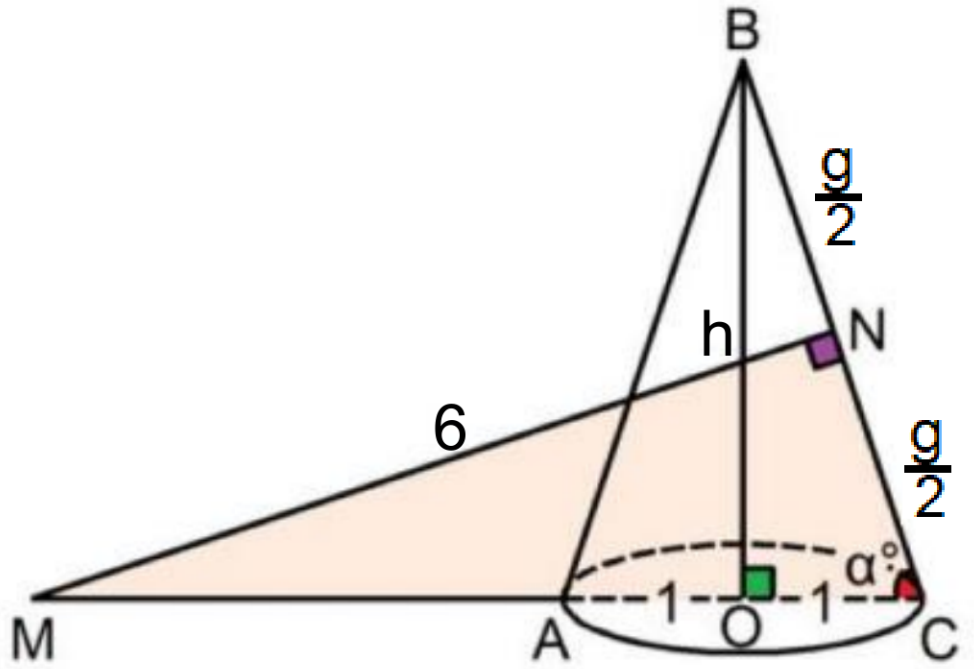
En la figura, $\overline{AC}$ es diámetro y NB=NC. Si AC=2 m y MN=6 m, halle numéricamente el producto del área lateral y del volumen del cono de revolución.



A) $4\pi^2$ B) $9\pi^2$ C) $3\pi^2$
D) $5\pi^2$ E) $6\pi^2$

RESOLUCIÓN

Se pide: $x = S_L . V$



Por semejanza: $\tan\alpha = \frac{h}{1} = \frac{6}{\frac{g}{2}} \rightarrow g.h = 12$

Finalmente: $x = (\pi r.g).(\frac{1}{3}\pi r^2.h) = (\pi.1.g).(\frac{1}{3}\pi(1)^2.h)$

$$x = \frac{1}{3}\pi^2 g.h$$

$$\therefore x = 4\pi^2$$

EJEMPLOS

EJEMPLO:

Si el área lateral de un cono de revolución es igual a $\sqrt{2}$ veces el área de su base. Calcule el ángulo que forma la generatriz con la altura.

A) 30 B) 60 C) 37
D) 53 E) 45

Rpta. E

EJEMPLO:

Calcular el volumen del cono circular recto de altura h, si la longitud de la circunferencia de la base es c.

A) $\frac{c^2h}{8\pi}$ B) $\frac{c^2h}{4\pi}$ C) $\frac{c^2h}{12\pi}$
D) $\frac{c^2h}{16\pi}$ E) $\frac{c^2h}{9\pi}$

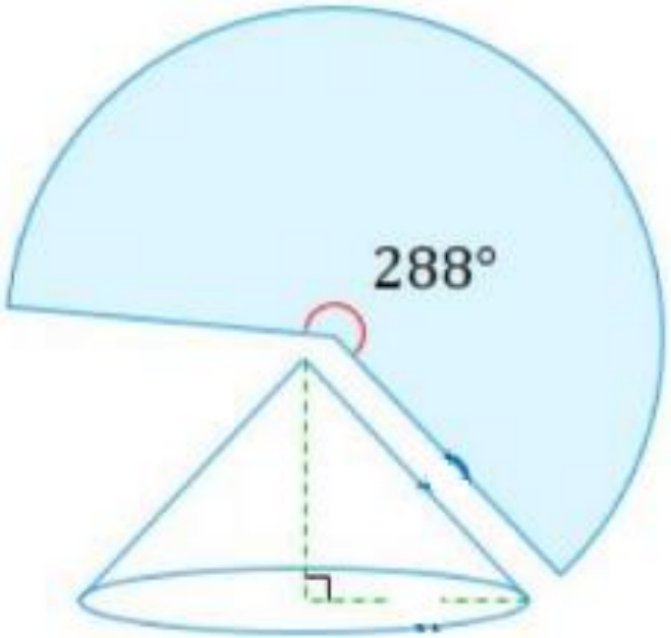
Rpta. C

EJEMPLOS

EJEMPLO:

El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un sector circular de 288° y un metro de radio. Calcular el volumen del cono en decímetros cúbicos.

A) 100π B) 120π C) 128π
D) 164π E) 200π

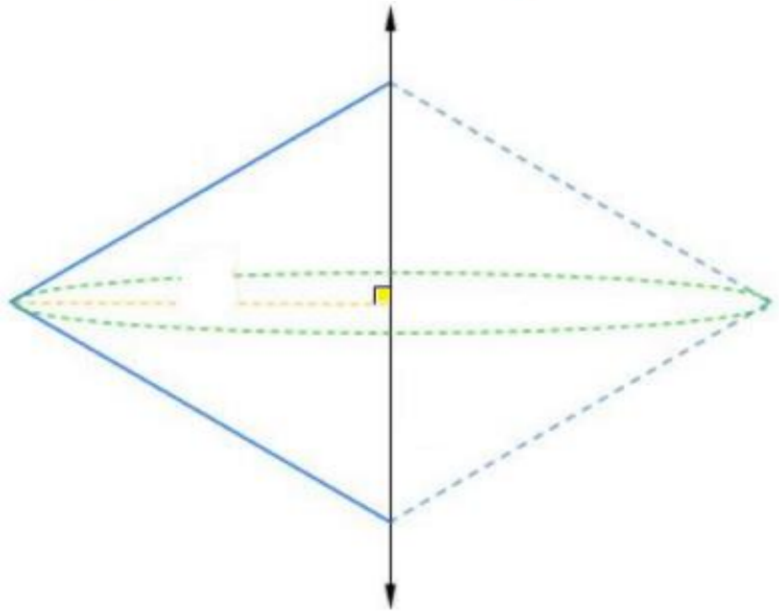


Rpta. C

EJEMPLO:

Calcular el volumen del sólido generado por un triángulo equilátero de lado a al girar alrededor de uno de sus lados.

A) πa^3 B) $\frac{\pi a^3}{2}$ C) $\frac{\pi a^3}{3}$
D) $\frac{\pi a^3}{4}$ E) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$



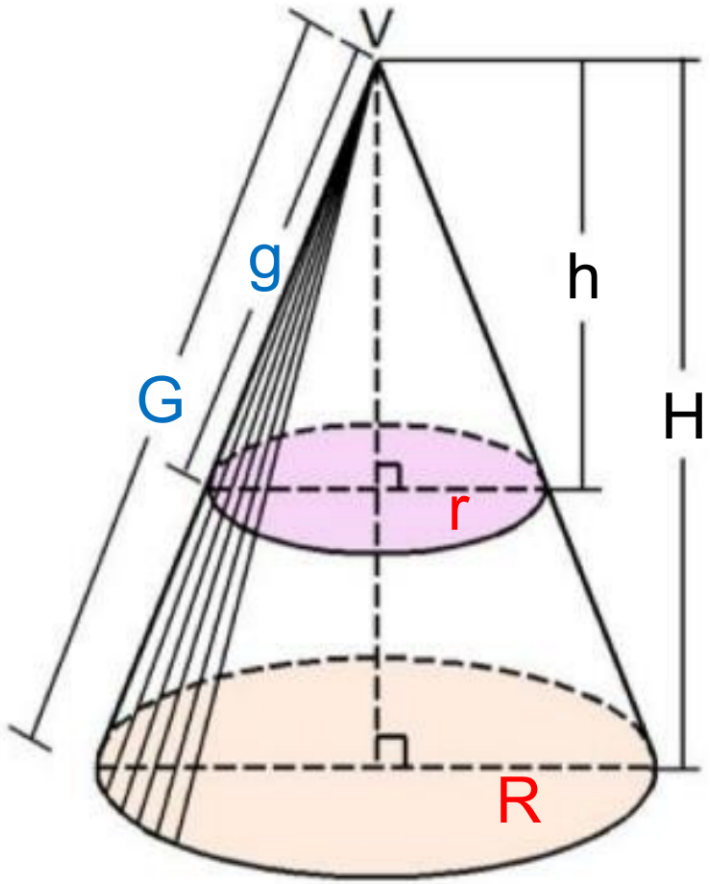
Rpta. D

CONO

CONOS SEMEJANTES

Al igual que en las pirámides si en un cono se traza un plano paralelo a la base y secante a la superficie lateral, entonces el cono parcial determinado será semejante al cono original.

Si en el gráfico los planos mostrados son paralelos, entonces se cumple:



$$\frac{r}{R} = \frac{g}{G} = \frac{h}{H}$$

$$\frac{S_{L(Conito)}}{S_{L(Cono)}} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2} = \frac{S_{T(Conito)}}{S_{T(Cono)}}$$

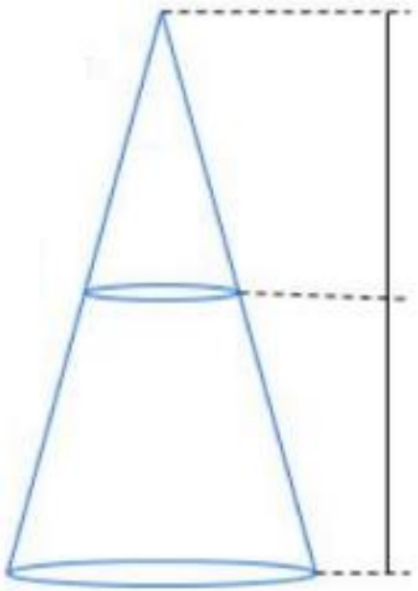
$$\frac{V_{Conito}}{V_{Cono}} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{g^3}{G^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

EJEMPLOS

EJEMPLO:

El volumen de un cono es 16, si por el punto medio de su altura se traza un plano paralelo a la base, calcular el volumen del cono pequeño formado.

A)1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

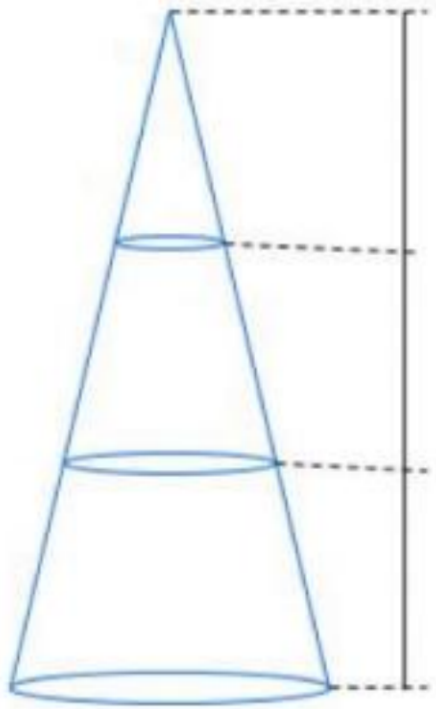


Rpta. B

EJEMPLO:

El volumen de un cono es V, si su altura es trisecada por dos planos paralelos a la base calcular el volumen de la porción central.

A) $\frac{6V}{13}$ B) $\frac{7V}{27}$ C) $\frac{V}{3}$
D) $\frac{2V}{3}$ E) $\frac{V}{7}$

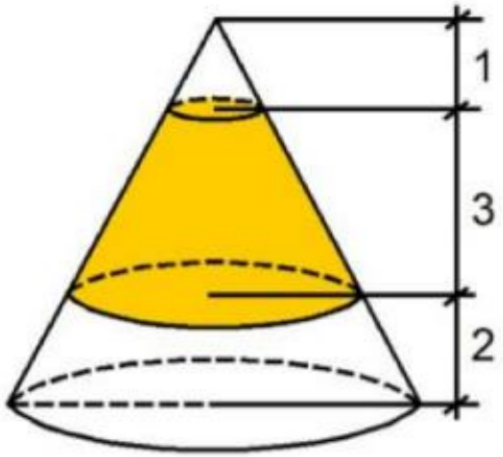


Rpta. B

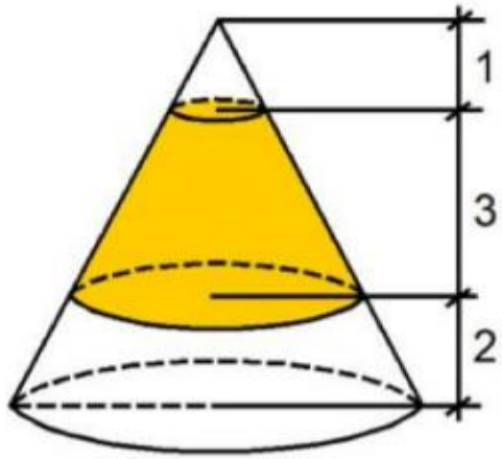
EJEMPLOS

EJEMPLO:

El volumen del cono es igual a 216. Calcular el volumen del sólido sombreado.



A) 60 B) 61 C) 62
D) 63 E) 64

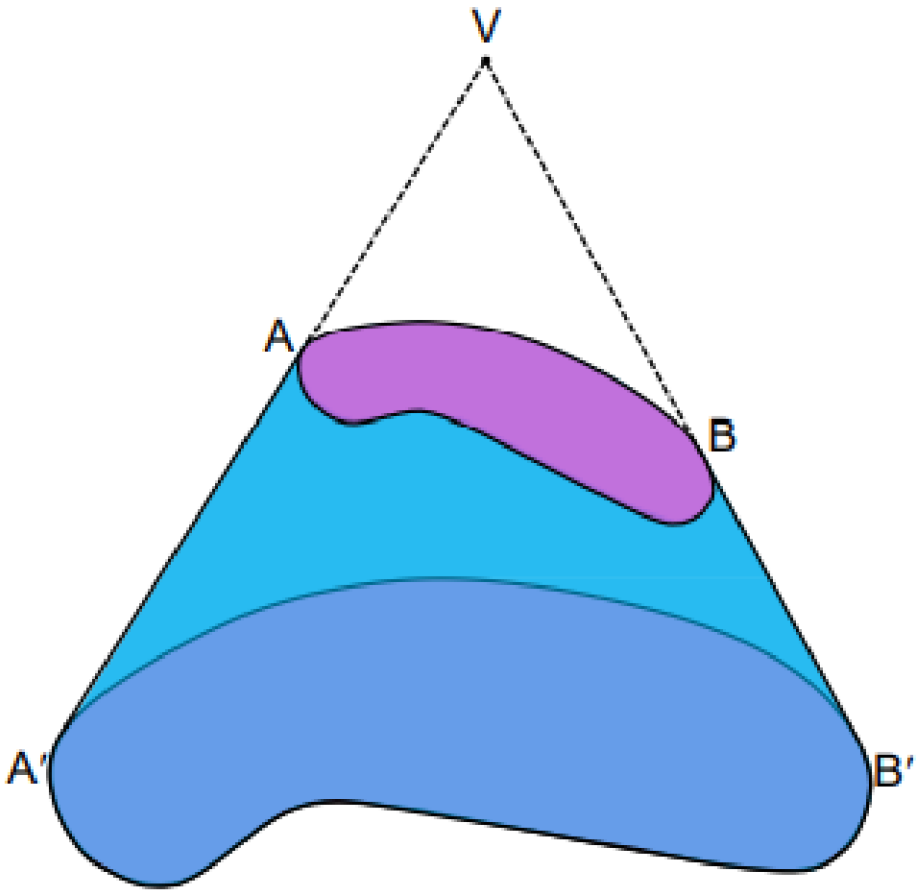


Rpta. D

CONO

TRONCO DE CONO

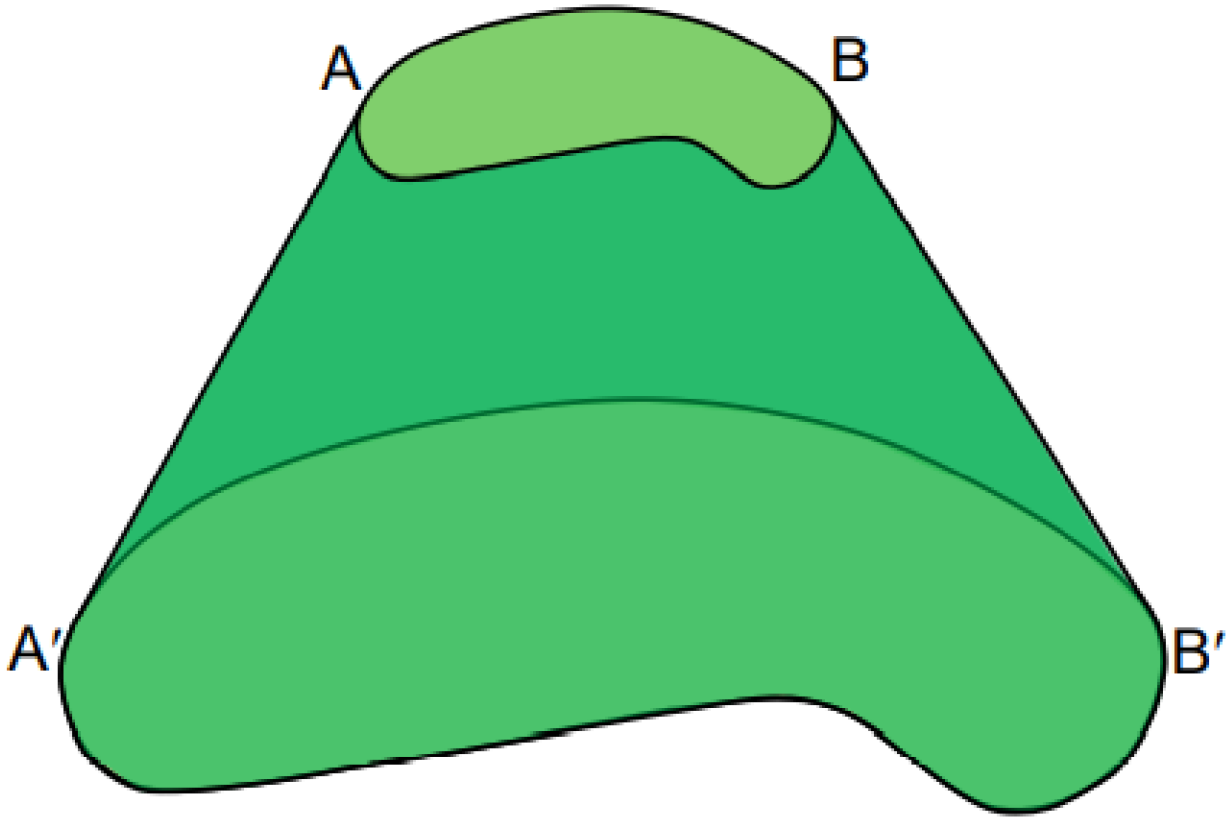
Definición.- Es la unión de una parte del cono que incluye a la base y la sección determinada por un plano secante a todas las generatrices.



CONO

TRONCO DE CONO DE BASES PARALELAS

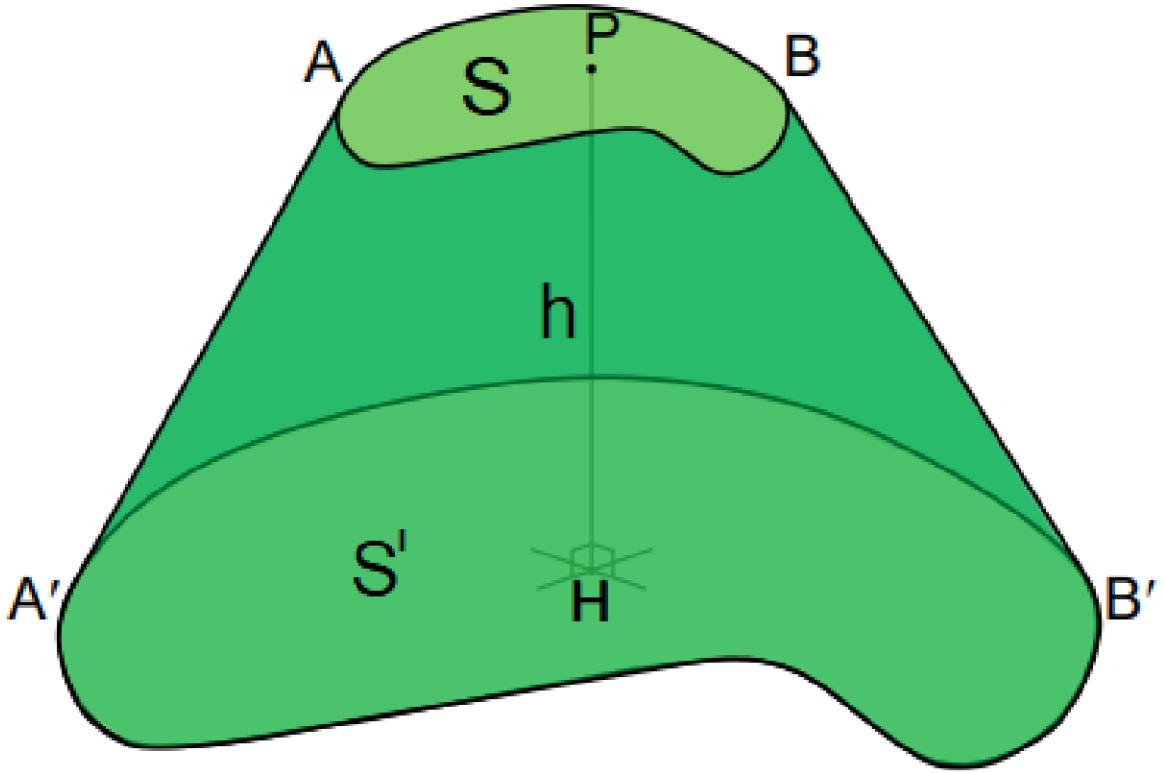
Definición.- Se denomina ***tronco de cono de bases paralelas*** al tronco de cono cuyas bases están contenidas en planos paralelos.



CONO

VOLUMEN DEL TRONCO DE CONO DE BASES PARALELAS

Teorema.- El volumen del sólido determinado por un tronco de cono de bases paralelas es igual a un tercio del producto de la longitud de la altura y la suma de las áreas de las bases más la media geométrica de las áreas de las bases.



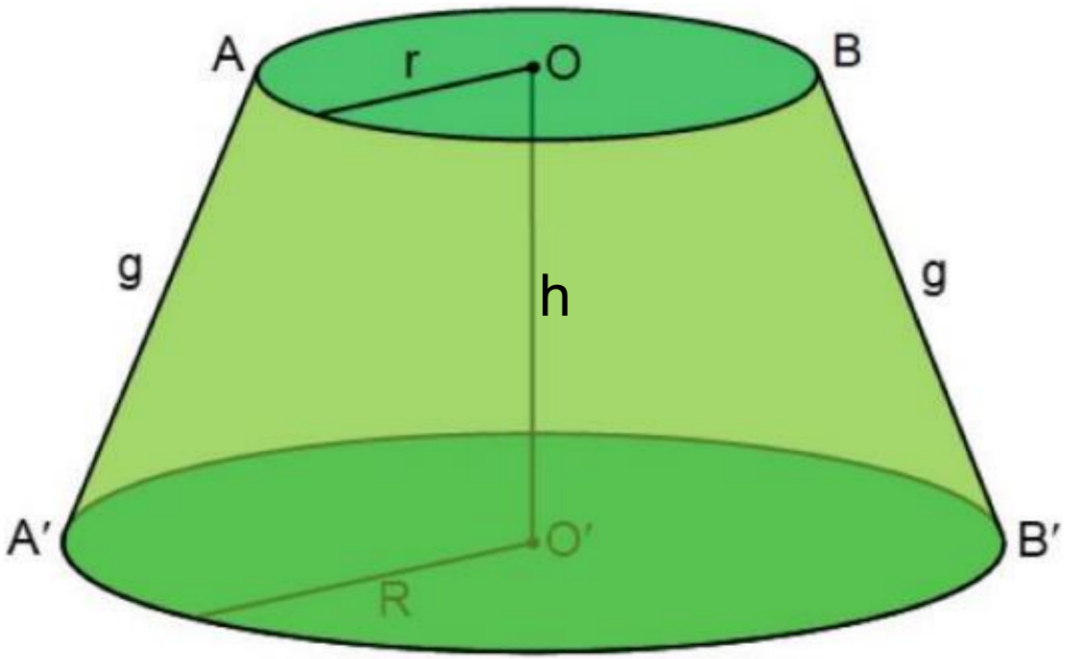
$$\mathbb{V} = \frac{h}{3}(S + S' + \sqrt{S.S'})$$

CONO

TRONCO DE CONO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCIÓN

Definición.- Es el tronco de cono circular recto de bases paralelas.

En este tronco de cono sus bases son círculos y sus generatrices son congruentes entre si.



Base menor.- Círculo de centro O y radio r.

Base mayor.- Círculo de centro O' y radio R.

Altura (h).- Distancia entre las bases.

Generatriz (g).- Segmento de generatriz del cono ($\overline{AA'}$) que da origen al tronco y está comprendida entre las bases.

Eje del tronco $\overline{OO'}$.- Segmento que une los centros de las bases.

Superficie lateral.- Superficie comprendida entre las bases del tronco de cono.

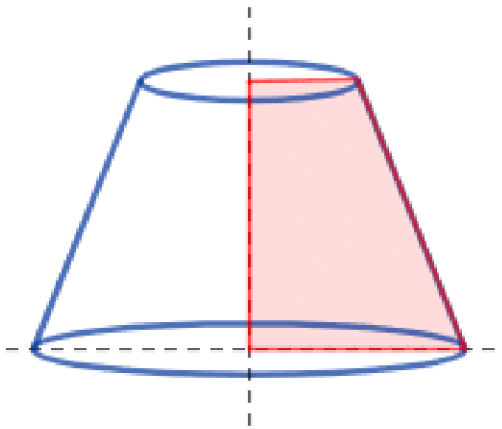
Superficie total.- Es la unión de la superficie lateral y las bases del tronco de cono.

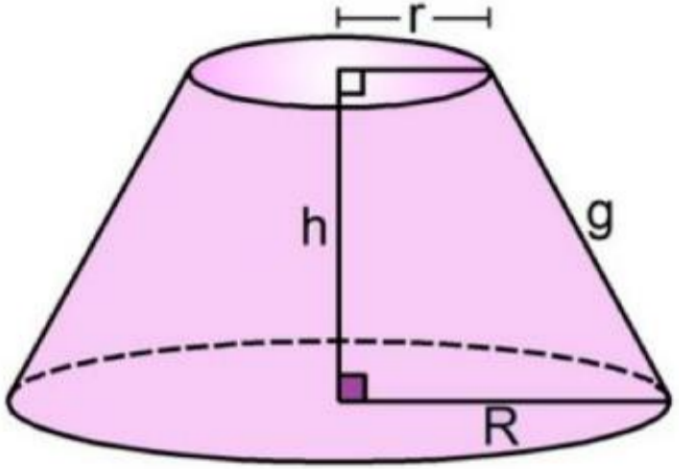
CONO

TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN (DE BASES PARALELAS)

Se llama tronco de cono a la figura geométrica determinada por un cono y un plano paralelo a la base del cono, secante a todas las generatrices del cono.

Se considera que ésta figura se genera al girar una vuelta un trapecio rectángulo alrededor de un eje que contiene al menor de los lados no paralelos.





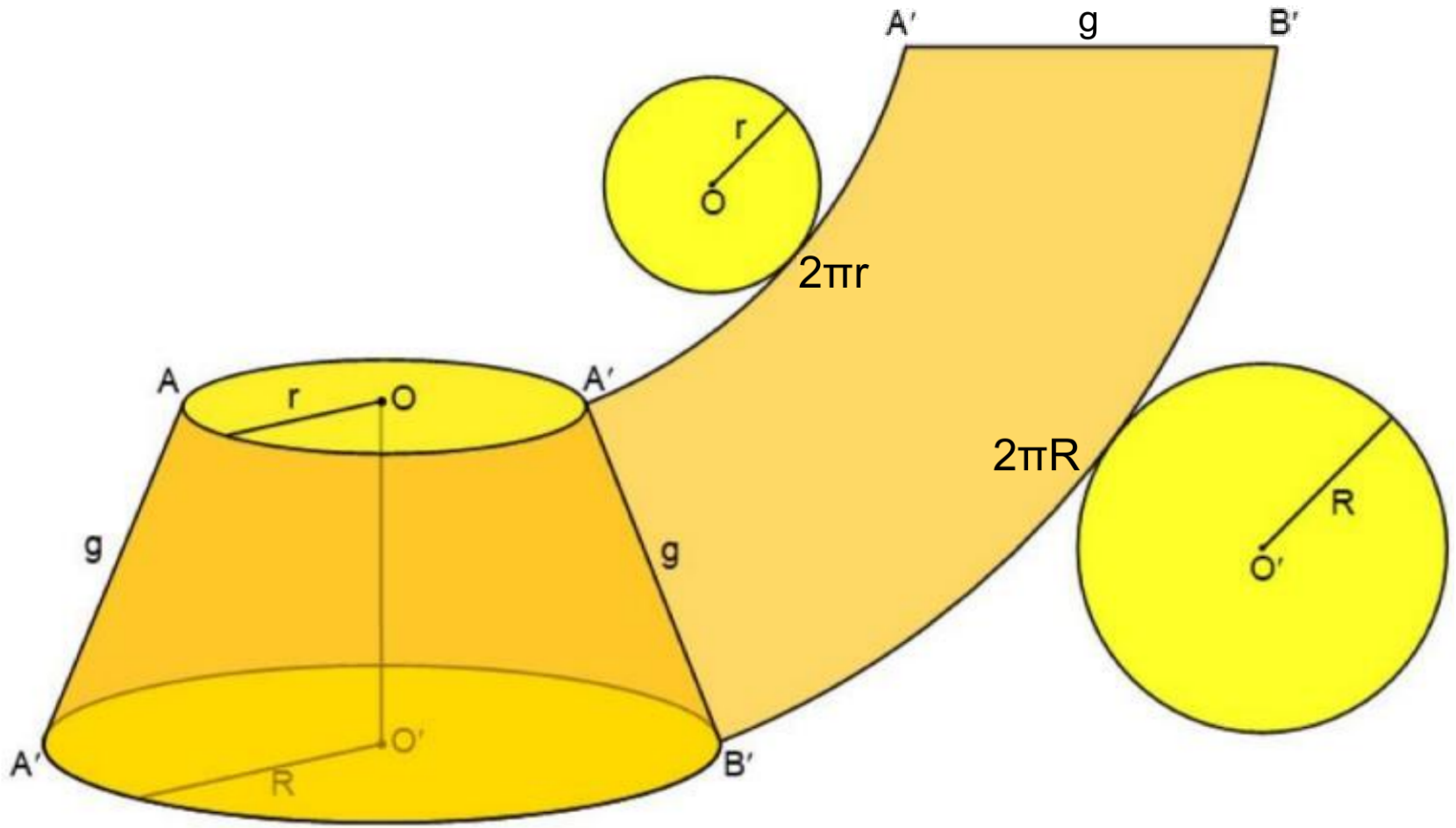
$$S_{LATERAL} = \pi(r + R).g$$

$$S_{TOTAL} = S_{LATERAL} + \pi r^2 + \pi R^2$$

$$V_{TRONCO} = \frac{\pi h}{3}(r^2 + R^2 + r.R)$$

CONO

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL Y TOTAL DE UN TRONCO DE CONO CIRCULAR RECTO



EJEMPLO

Hallar la altura del tronco de cono cuyos radios básicos son R y r, si la suma de las áreas de las bases es igual al área lateral del tronco.

A) R + r B) 2R + r C) $\frac{R+r}{\sqrt{R+r}}$

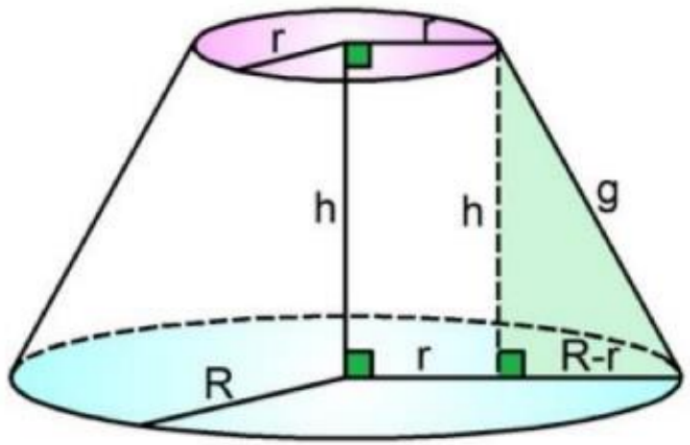
D) $\frac{2Rr}{R+r}$ E) $\frac{3Rr}{R+r}$

RESOLUCIÓN

Dato:

$$S_{L(Tronco)} = S_{Base(1)} + S_{Base(2)}$$

Se pide: h



Por dato: $S_{L(Tronco)} = S_{Base(1)} + S_{Base(2)}$

$$\pi(r+R).g = \pi r^2 + \pi R^2$$

$$\rightarrow g = \frac{R^2 + r^2}{R + r}$$

Por Pitágoras: $h^2 + (R-r)^2 = g^2$

$$h^2 + (R-r)^2 = \left(\frac{R^2 + r^2}{R + r}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{(R^2 + r^2)^2}{(R+r)^2} - (R-r)^2 = \frac{(R^2 + r^2)^2 - (R^2 - r^2)^2}{(R+r)^2}$$

$$h^2 = \frac{4R^2r^2}{(R+r)^2}$$

$$\therefore h = \frac{2Rr}{R+r}$$

EJEMPLOS

EJEMPLO:

Se tiene un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y en B, que gira en torno a su lado $\overline{AB}$ determinando un tronco de cono. Si AB=3, BC=2 y AD=6, calcular el área lateral del tronco de cono formado.

A) 36 π B) 45 π C) 48 π
D) 40 π E) 50 π

Rpta. D

EJEMPLO:

Los diámetros de las bases de un tronco de cono de revolución miden 22 y 4 unidades, respectivamente. Calcule la longitud del radio (en unidades) de la base de un cilindro de revolución que tiene la misma altura y el volumen equivalente al tronco de cono dado.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10,5 (UNI 2009-2)

Rpta. B

EJEMPLOS

EJEMPLO:

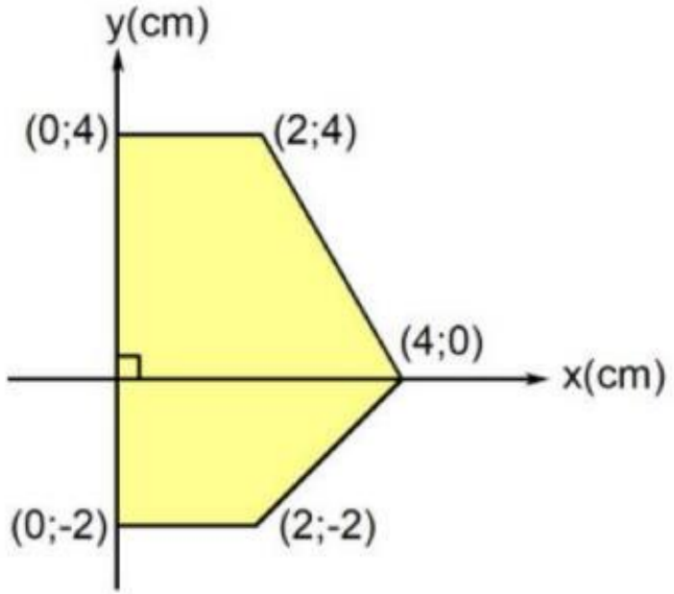
Considere un embudo compuesto por un tronco de cono de altura 12 cm y radios de sus bases 5R cm y R cm, y un cilindro de radio R cm y altura 5 cm. Si el embudo puede contener 129 π cm^3 de agua, halle R (en cm).

A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5 (UNI 2010-1)

Rpta. B

EJEMPLO:

Para la figura:



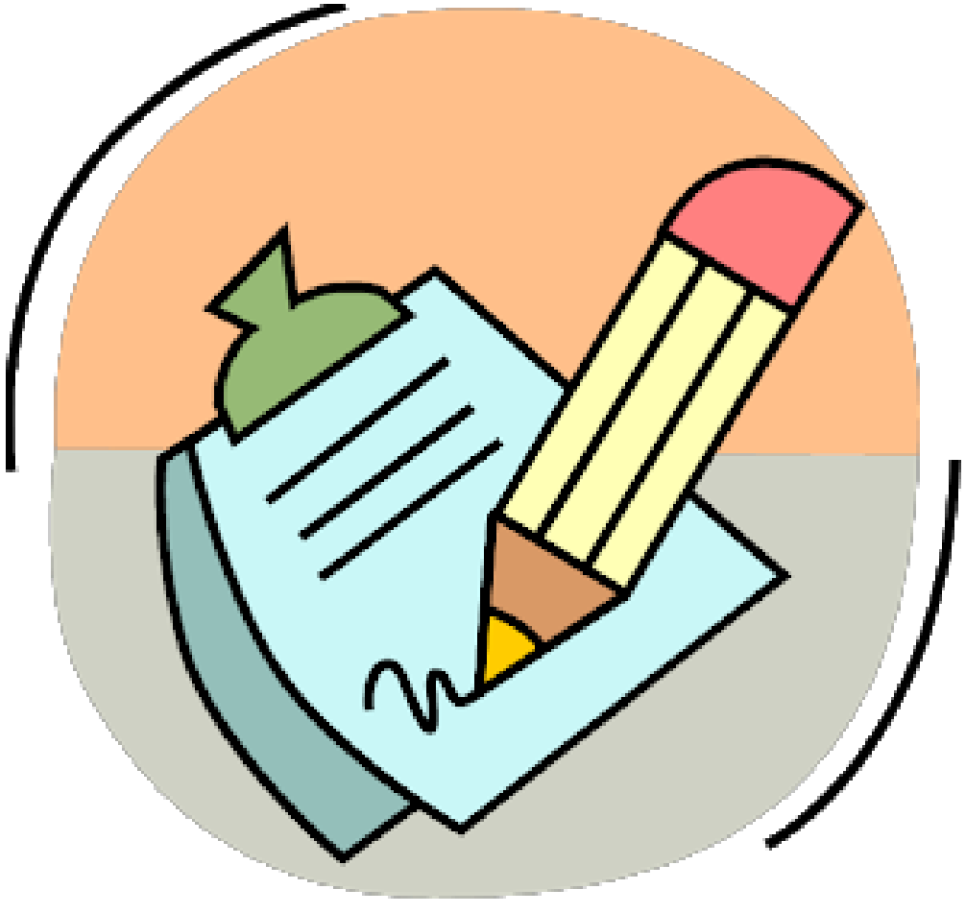
Encontrar el volumen (en cm^3) del sólido generado al girar la región sombreada alrededor del eje Y.

A) $\frac{14\pi}{3}$ B) $\frac{28\pi}{3}$ C) 28 π
D) 32 π E) 56 π

Rpta. E

CONO

MOMENTO DE PRACTICAR



PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

EJERCICIOS

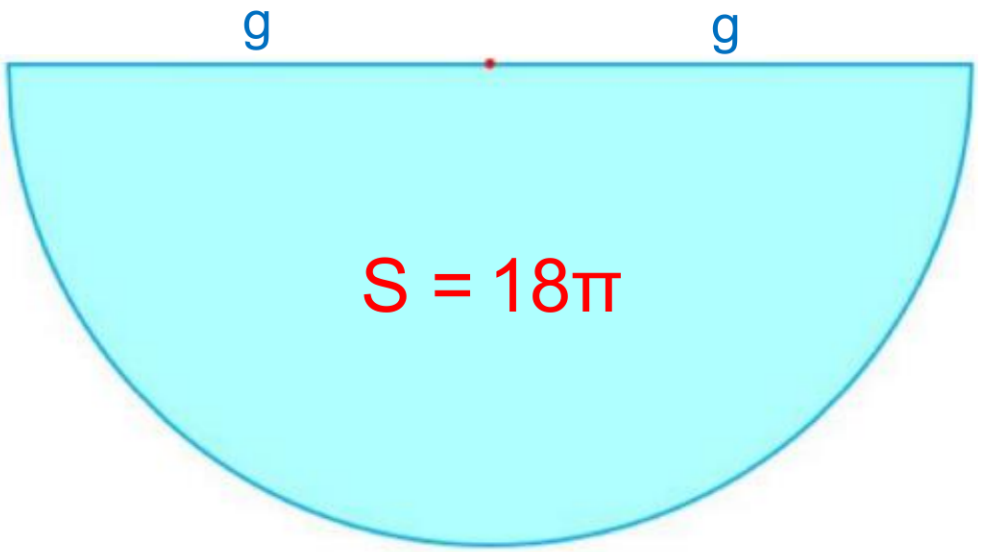
01. Calcular el volumen de un cono de revolución sabiendo que el desarrollo de su superficie lateral es un semicírculo cuya área es 18π.

A) $3\pi\sqrt{3}$ B) $5\pi\sqrt{3}$ C) $9\pi\sqrt{3}$

D) $12\pi\sqrt{3}$ E) $15\pi\sqrt{3}$

Resolución:

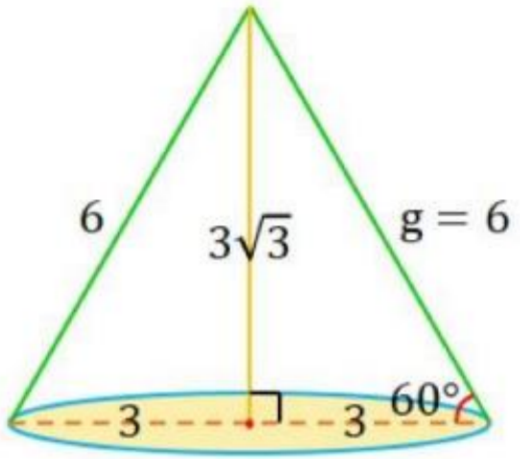
Desarrollo de la superficie lateral



$$S = \frac{1}{2}\pi g^2 = 18\pi$$

$$\rightarrow g = 6$$

Si el desarrollo de la superficie lateral de un cono es un semicírculo, entonces dicho cono será un cono equilátero, cumpliéndose que su generatriz es congruente con el diámetro de la base.



Finalmente calculamos el volumen del cono:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3}\pi . 3^2 . 3\sqrt{3}$$

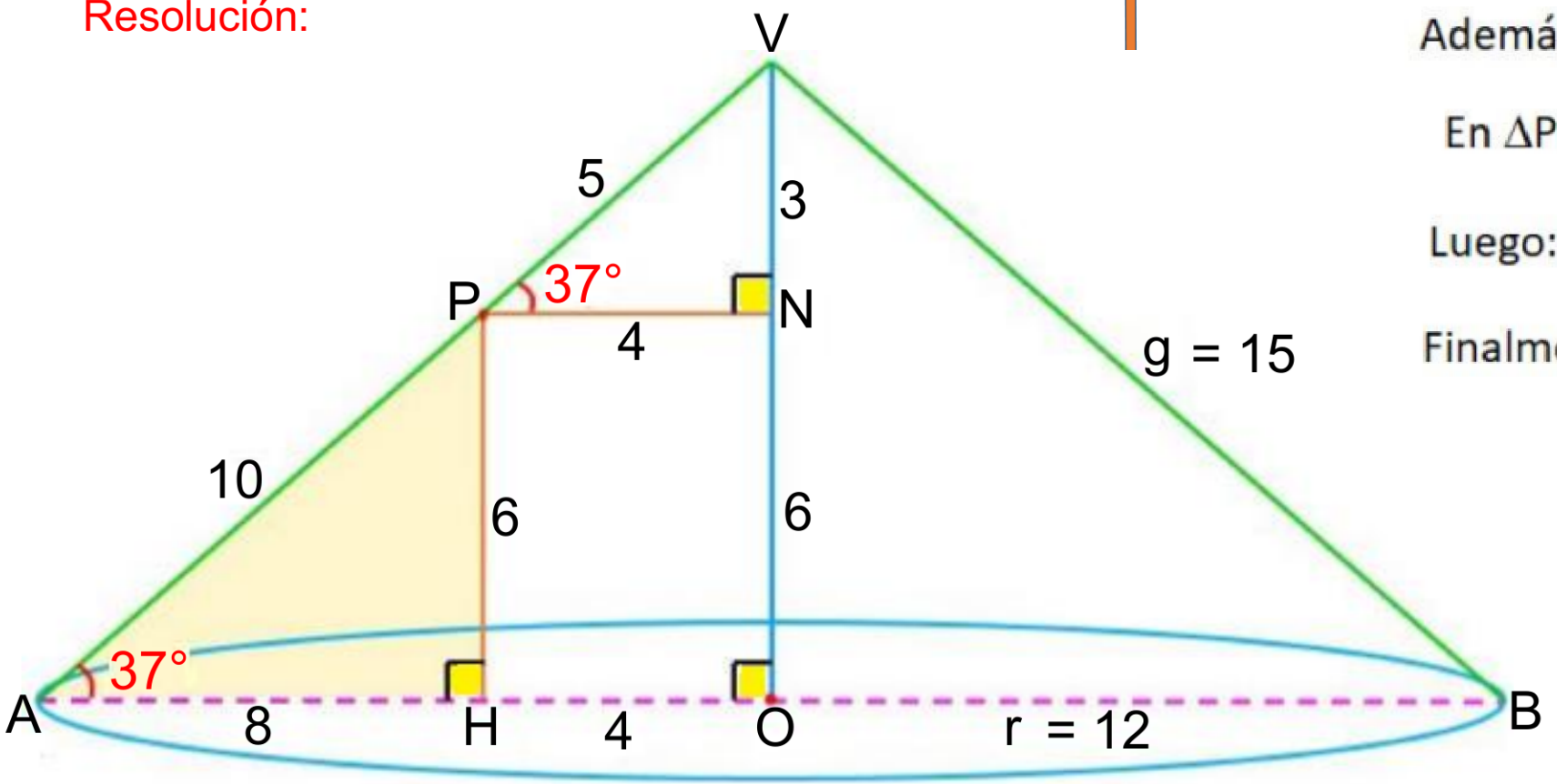
$$\therefore V_{Cono} = 9\pi\sqrt{3}$$

EJERCICIOS

02. Calcular el área total (en cm^2) de un cono de revolución, sabiendo que un punto P ubicado en la generatriz dista del vértice, de la altura y de la base 5 cm, 4 cm y 6 cm, respectivamente.

A) 162π B) 324π C) 360π
D) 425π E) 625π

Resolución:



Se pide: $S_{T(Cono)} = ?$

Se observa:

ΔVNP: $VN = 3$ y $m\angle VPN = 37$

Además: $m\angle PAH = 37$

En ΔPHA: $AH = 8$ y $AP = 10$

Luego: $r = 12$ y $g = 15$

Finalmente:

$$S_{T(Cono)} = \pi r(g + r)$$

$$S_{T(Cono)} = \pi(12)(27)$$

$$\therefore S_{T(Cono)} = 324\pi$$

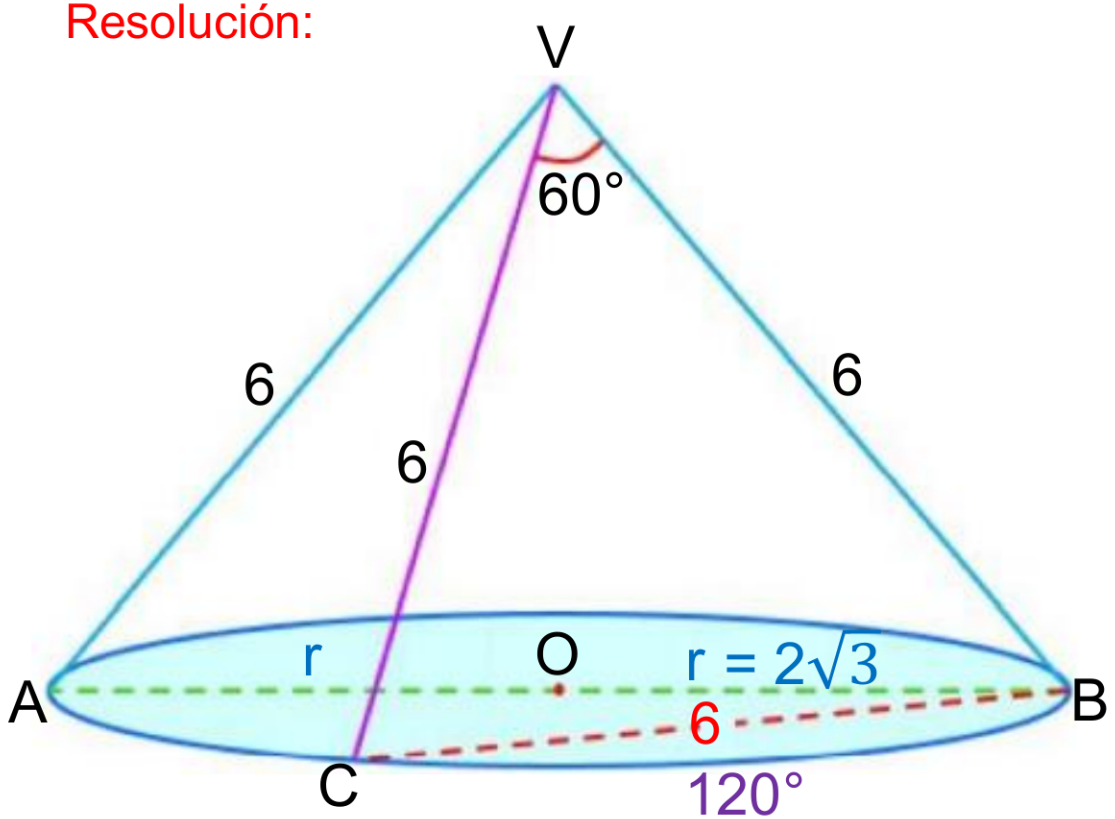
EJERCICIOS

03. En un cono de revolución cuyas generatrices miden 6, dos generatrices que forman un ángulo de 60°, tienen extremos en la base que determinan una cuerda que subtiende un arco de 120°. Calcular el área de la superficie lateral del cono.

A) 6π B) 12π C) $6\pi\sqrt{3}$

D) $12\pi\sqrt{3}$ E) $8\pi\sqrt{3}$

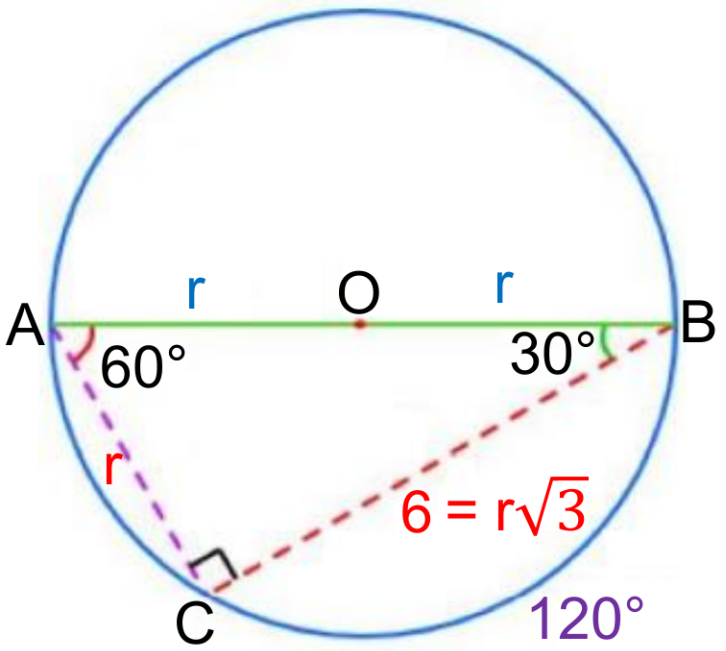
Resolución:



Se pide: $S_L = ?$

ΔBVC: Equilátero $\Rightarrow BC = 6$

En la base:



$r\sqrt{3} = 6$

$\rightarrow r = 2\sqrt{3}$

Finalmente: $S_L = \pi rg$

$S_L = \pi(2\sqrt{3}).6$

$\therefore S_L = 12\pi\sqrt{3}$

EJERCICIOS

04. Calcular el volumen de un tronco de cono circular recto, sabiendo que el desarrollo de la superficie lateral es un trapecio circular de área 30π, la altura del tronco y su generatriz miden 3 y 5 respectivamente.

A) 30π B) 31π C) 32π
D) 33π E) 36π

Resolución:

Se pide: $V_{Tronco} = V_x$

Dato: $S_{Trapecio\ circular} = 30\pi$

Recordamos que al desarrollar la superficie lateral de un tronco de cono, entonces el área del trapecio circular resultante es igual al área lateral del tronco de cono. Luego:

$$S_{L(Tronco)} = S_{Trapecio\ circular}$$

$$\pi(r + r + 4)5 = 30\pi$$

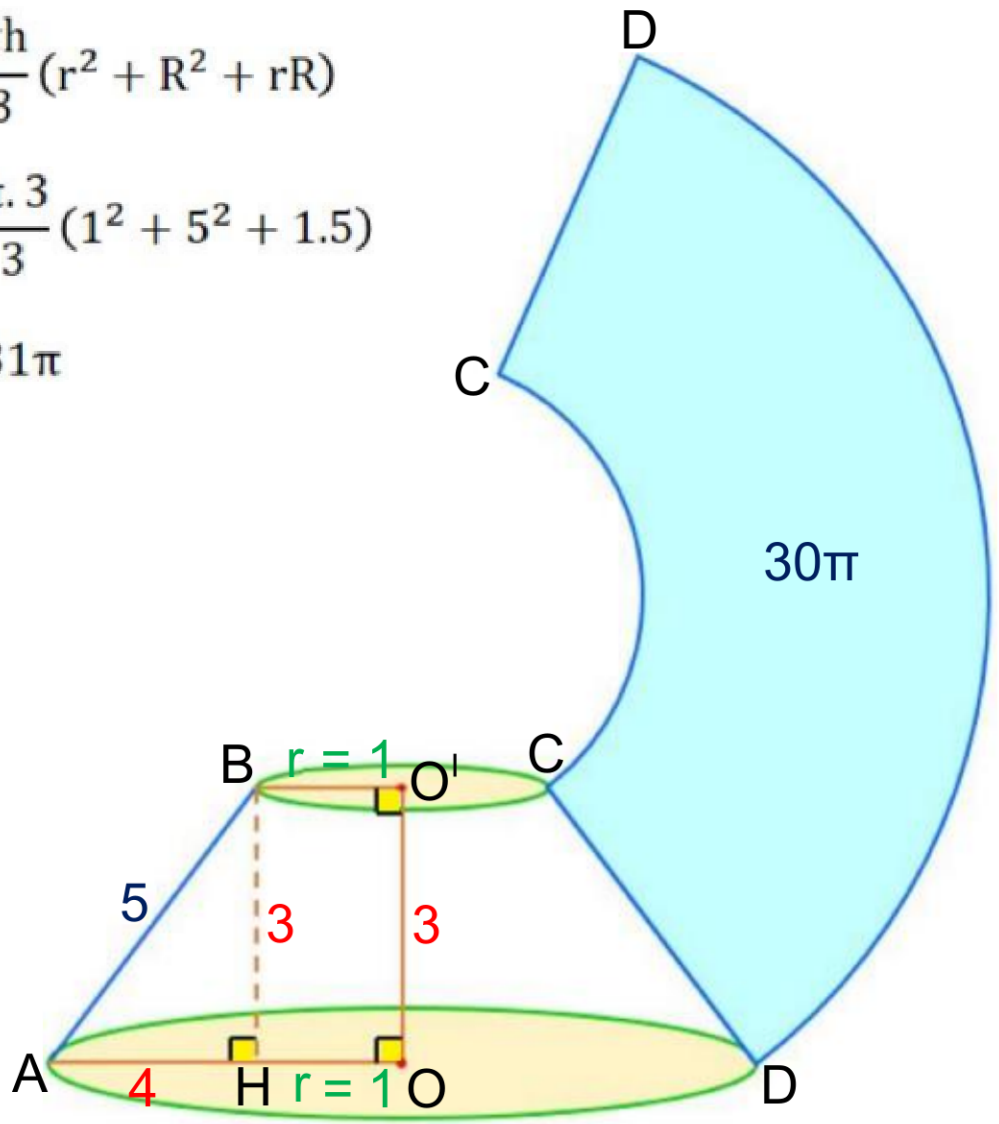
$$\rightarrow r = 1$$

Finalmente, calculamos el volumen del tronco:

$$V_x = \frac{\pi h}{3}(r^2 + R^2 + rR)$$

$$V_x = \frac{\pi . 3}{3}(1^2 + 5^2 + 1.5)$$

$$\therefore V_x = 31\pi$$



EJERCICIOS

05. El radio de la esfera inscrita en un cono de revolución mide 3, un plano secante a la superficie lateral del cono y tangente a la esfera es perpendicular a una de sus generatrices y dista 1 del vértice. Calcular el volumen del cono.

A) 54π B) 72π C) 48π
D) 96π E) 108π

Resolución:

Se pide: $V_{Cono} = ?$

En ΔPTO: $PO = 5$

y $m\angle OPT = 37$

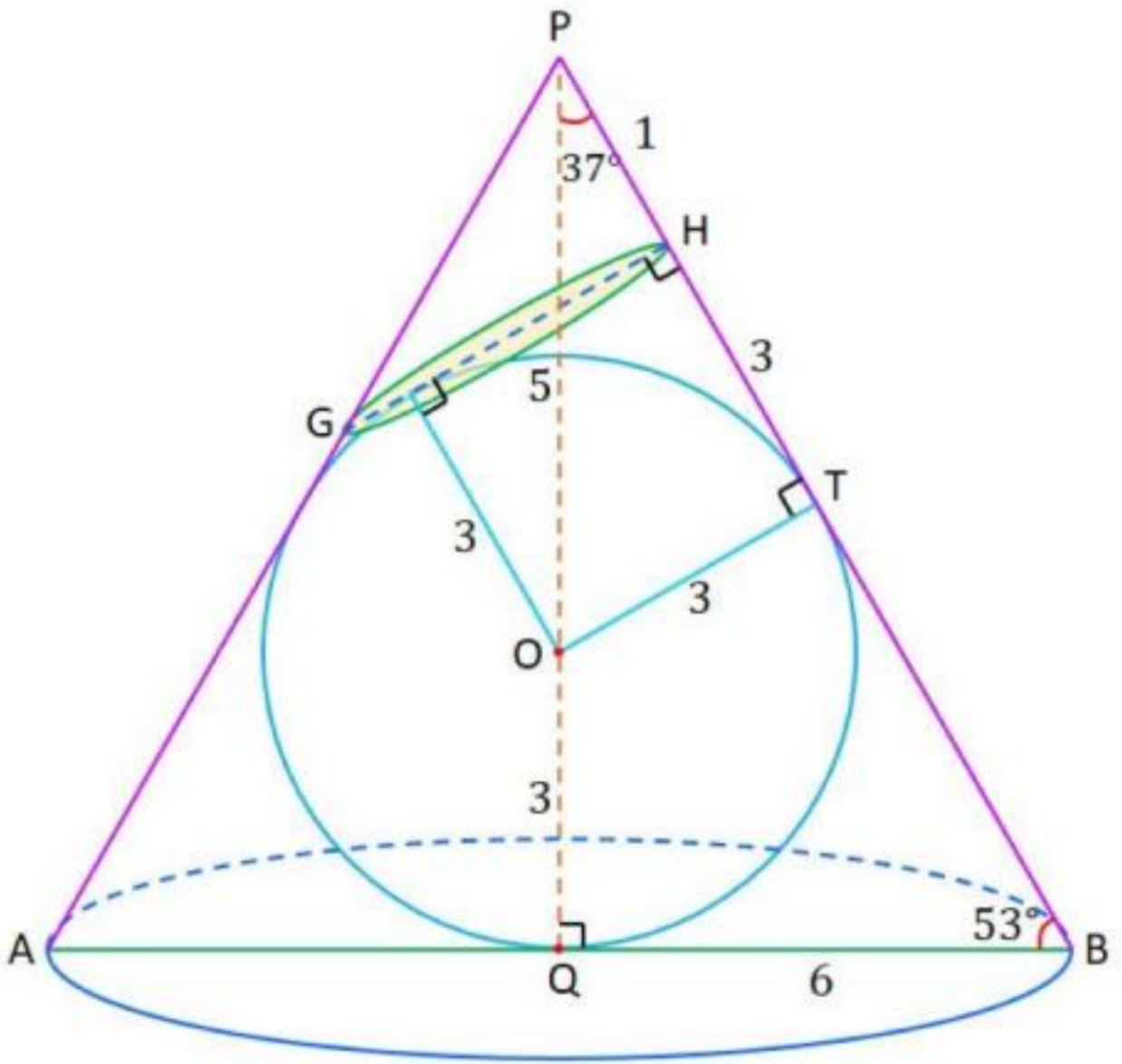
En ΔPQB: $m\angle PBQ = 53$

y $QB = 6$

Por último:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3}\pi . 6^2 . 8$$

$$\therefore V_{Cono} = 96\pi$$

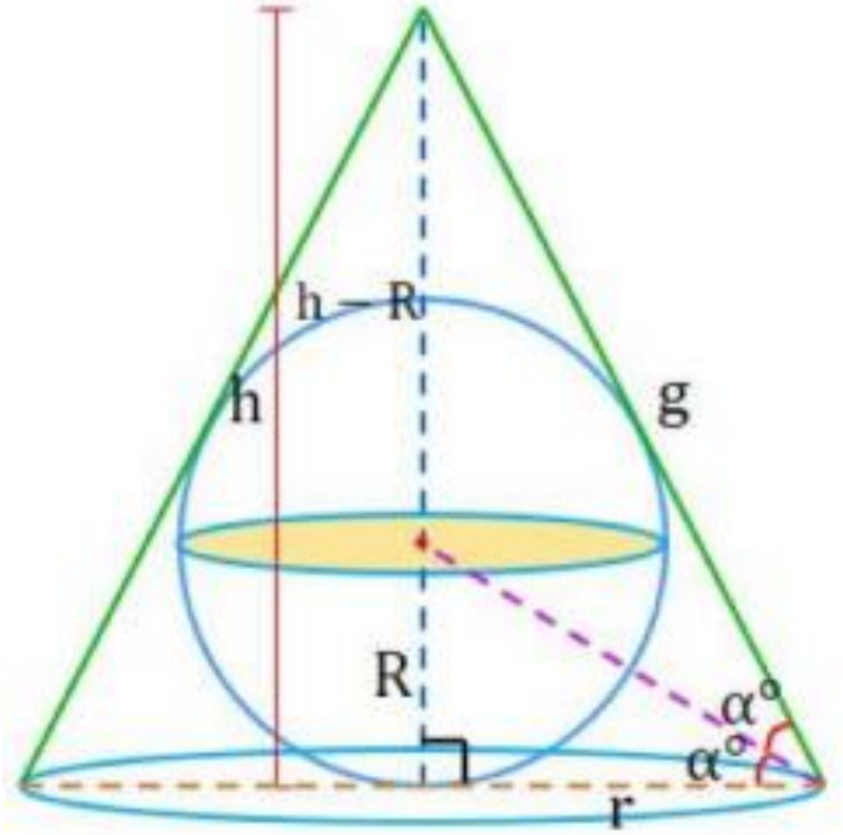


EJERCICIOS

06. En un cono circular recto está inscrita una esfera. La razón entre los volúmenes del cono y la esfera es 2. Halle la razón entre el área de la superficie total del cono y el área de la superficie esférica.

A) 2 : 1 B) 3 : 2 C) 5 : 2
D) 3 : 1 E) 5 : 3

Resolución:



Dato: $\frac{V_{Cono}}{V_{Esfera}} = 2$

Se pide: $x = \frac{S_{T(Cono)}}{S_{Esfera}}$

Por teorema de la bisectriz: $\frac{g}{r} = \frac{h-R}{R}$

$$\rightarrow hr = R(g+r) \quad \ldots(1)$$

Veamos lo que se pide:

$$x = \frac{S_{T(Cono)}}{S_{Esfera}} = \frac{\pi r(g+r)}{4\pi R^2} \quad \ldots(2)$$

De (1) en (2): $x = \frac{\pi r(g+r)}{4\pi R^2} \times \frac{hr}{R(g+r)}$

$$x = \frac{\pi r^2 h}{4\pi R^3} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{V_{Cono}}{V_{Esfera}}$$

$\therefore x = 2$

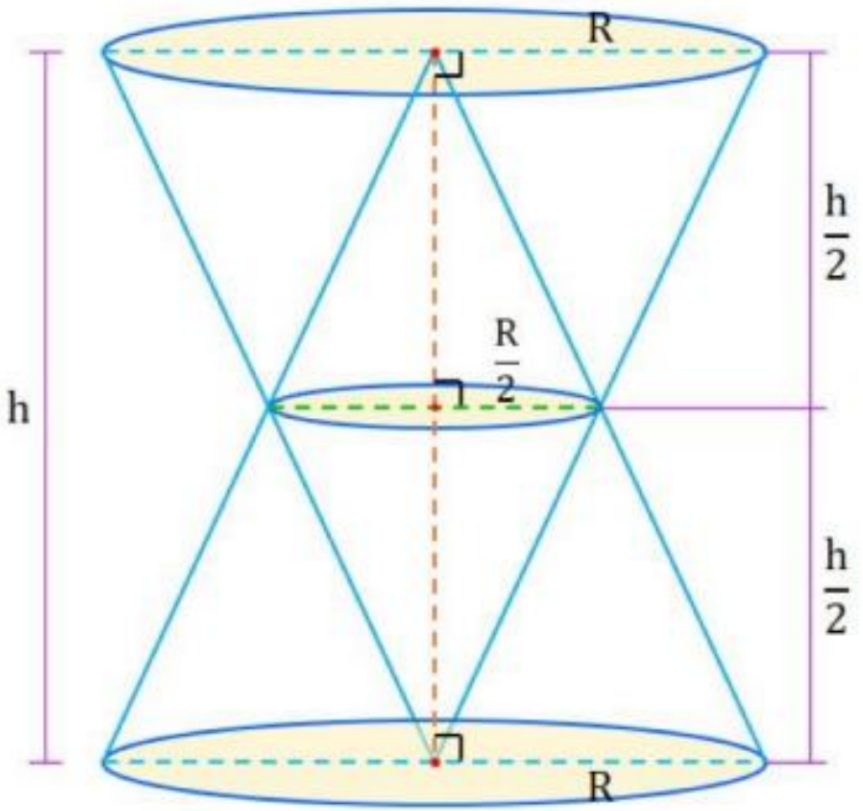
EJERCICIOS

07. Se tiene 2 conos rectos de la misma altura h y bases del mismo radio R. Si el vértice de cada cono está en el centro de la base del otro cono, el volumen común (en u^3) a los conos es:

A) $\pi R^2 h/4$ B) $\pi R^2 h/6$ C) $\pi R^2 h/8$

D) $\pi R^2 h/12$ E) $\pi R^2 h/13$ (EX UNI 2018−2)

Resolución:



Se pide: Volumen común a los conos $= V_x$

Se observa que el volumen común a los dos conos está representado por los dos conos pequeños determinados, en donde se tiene que el radio y altura son la mitad del radio y altura del cono original. Luego:

$$V_x = 2\left(\frac{1}{3}.\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2.\frac{h}{2}\right)$$

$$\therefore V_x = \frac{\pi R^2 h}{12}$$

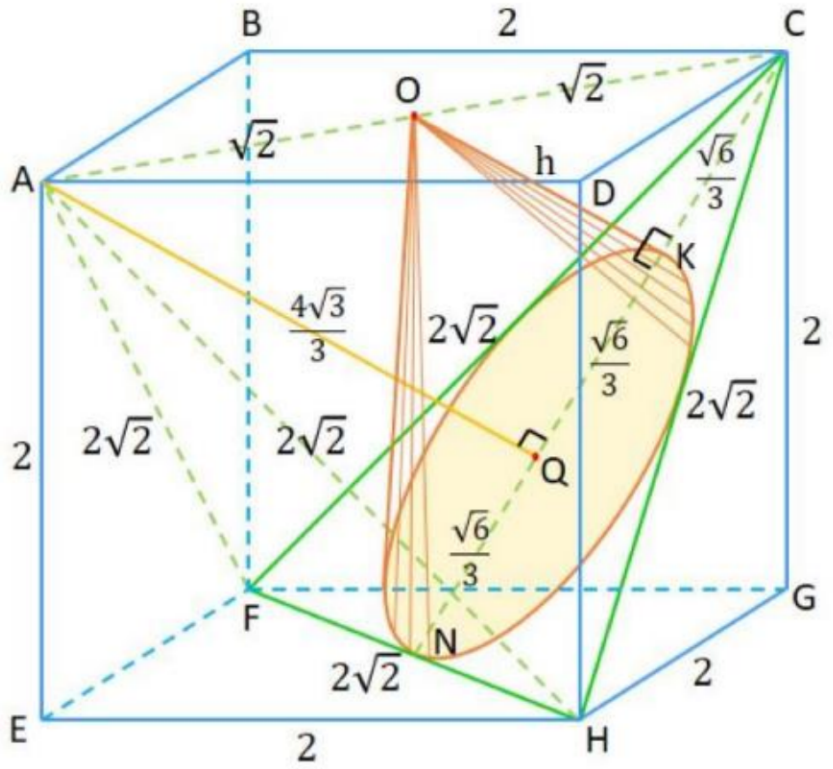
EJERCICIOS

08. En un cubo ABCD−EFGH cuya arista mide 2 m, calcule el volumen del cono cuyo vértice es el centro del cuadrado ABCD y su base es el círculo inscrito en el triángulo FCH.

A) $2\pi\sqrt{3}/9$ B) $4\pi\sqrt{3}/27$ C) $2\pi/9$

D) $4\pi/27$ E) $8\pi\sqrt{3}/3$

Resolución:



Se pide: $V_{Cono} = V_x$

En ΔFCH: $CN = \sqrt{6} \rightarrow QN = r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Se observa que A-FCH es un tetraedro regular, luego:

$$AQ = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{(2\sqrt{2})\sqrt{6}}{3}$$

$$AQ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\rightarrow OK = h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Por último:

$$V_x = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

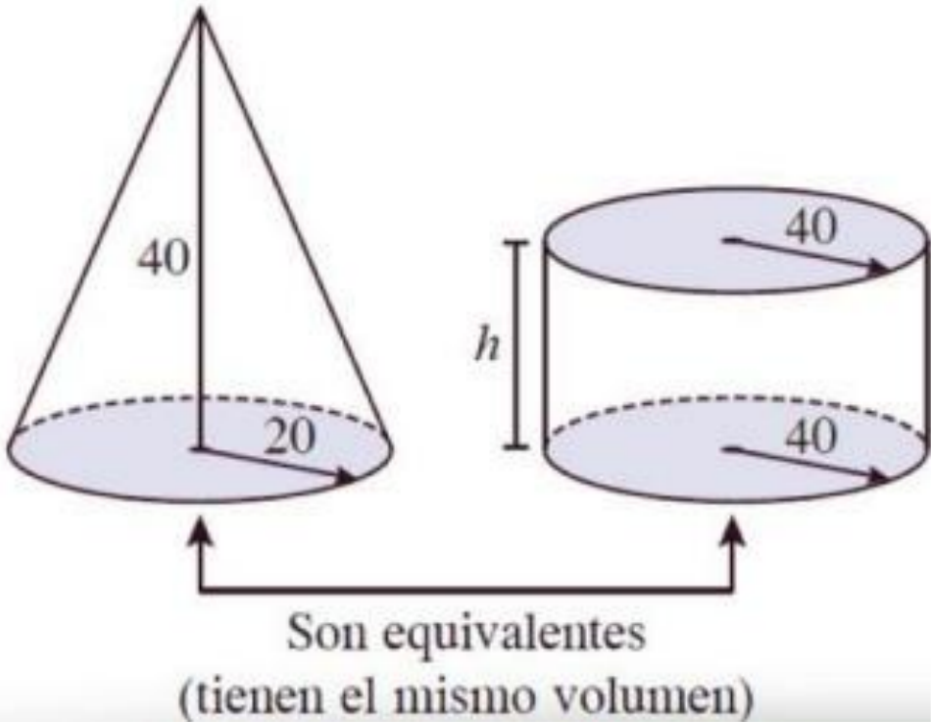
$$\therefore V_x = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}$$

EJERCICIOS

09. De un recipiente lleno de agua que tiene la forma de un cono circular recto de 20 cm de radio y 40 cm de altura, se vierte el agua a un recipiente cilíndrico de 40 cm de radio, entonces a qué altura, en cm, se encuentra el nivel del agua en el recipiente cilíndrico.

A) 5 B) 10/3 C) 5/2
D) 2 E) 5/3 (EX UNI 2013−2)

Resolución:



Piden: h

$$V_{cono} = V_{cilindro}$$

$$\frac{1}{3}\pi(20)^2 \cdot 40 = \pi(40)^2 \cdot h$$

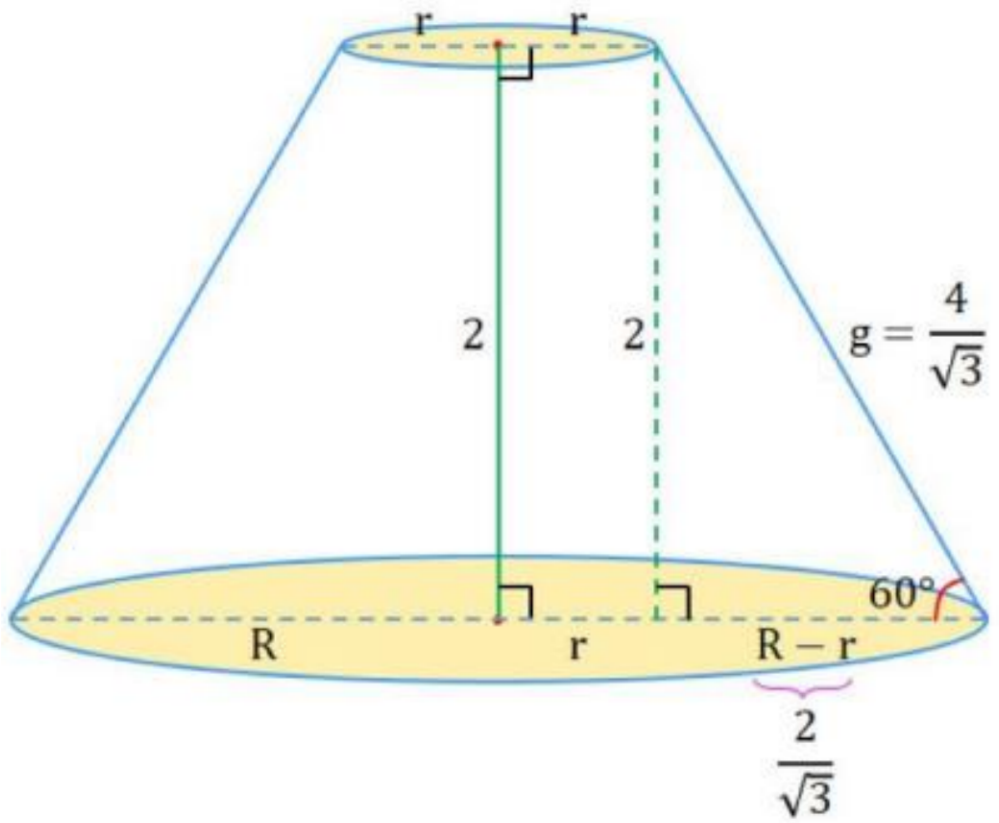
$$\boxed{h = \frac{10}{3}}$$

EJERCICIOS

10. La suma de los radios de las bases de un tronco de cono de revolución es 2, la altura mide 2 y la generatriz forma un ángulo de 60° con la base mayor. Calcule el área total del tronco.

A) $8\pi/(1+\sqrt{3})$ B) $(8\pi/3)(\sqrt{3}+1)$ C) $(8\pi/\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$
D) $(8\pi/3)(\sqrt{3}-1)$ E) $(8\pi/\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)$

Resolución:



Dato: $R + r = 2$

Se pide: $S_{T(Tronco)} = ?$

$$S_{T(Tronco)} = \pi(r + R)g + \pi r^2 + \pi R^2$$

Se observa: $R - r = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $g = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Recordamos:

$$(R + r)^2 + (R - r)^2 = 2R^2 + 2r^2$$

$$(2)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2R^2 + 2r^2 \rightarrow R^2 + r^2 = \frac{8}{3}$$

Para terminar:

$$S_{T(Tronco)} = \pi(2)\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) + \pi\left(\frac{8}{3}\right)$$

$$\therefore S_{T(Tronco)} = \frac{8\pi}{3}(\sqrt{3} + 1)$$

CLAVES

TAREA

01	02	03	04	05
A	A	B	C	A

06	07	08	09	10
A	E	A	A	C

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS